

Greške merenja i predstavljanje rezultata merenja

Dr Marjan Stankov
marjansstankov@gmail.com

Merenja i greške merenja

Po načinu na koji se dolazi do vrednosti merene fizičke veličine, sva merenja možemo podeliti na *direktna* i *indirektna*.

- Direktno merenje je merenje pri kome, kako mu samo ime kaže, direktno očitavamo vrednost fizičke veličine sa odgovarajućeg analognog ili digitalnog instrumenta, ili poređenjem sa usvojenom merom. Na primer, temperaturu nekog tela direktno očitavamo sa termometra, jačinu struje u nekom kolu direktno očitavamo sa ampermetra, vreme za koje se neko telo kreće direktno merimo hronometrom (štoperica) itd.
- Indirektno merenje je merenje pri kom vrednost neke fizičke veličine određujemo posrednim putem - preko formule koja je povezuje sa drugim veličinama koje merimo direktnim putem.

Greške merenja mogu biti:

- Sistematske,

pri ponovljenim merenjima ostaju konstatne ili se menjaju po određenom zakonu, povećanje broja merenja neće smanjiti sistematsku grešku.

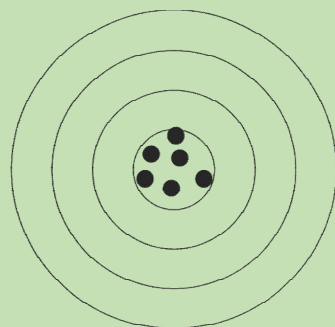
- Slučajne,

nastaju kao rezultat uticaja različitih efekata slučajnih parametara. Nemoguće ih je kontrolisati. Mnogostruko ponavljanje jednog te istog merenja smanjuje uticaj slučajne greške.

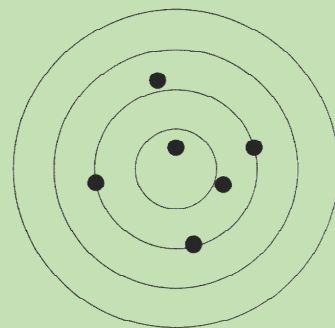
- Grube,

usled neobučenosti ili nepažnje izvršioca, kao i neispravnosti instrumenata.

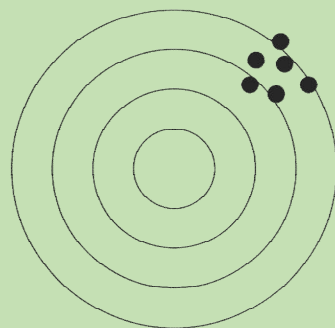
Veličina sistemske greške određuje *tačnost*, a veličina slučajne greške određuje *preciznost* merenja fizičke veličine.



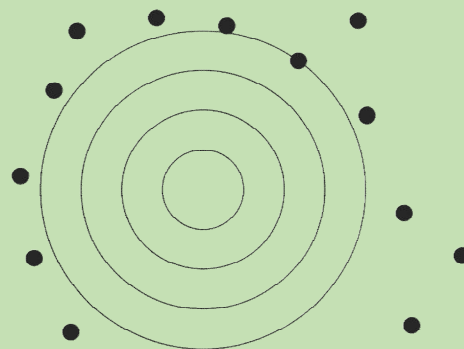
precizno i tačno



tačno a neprecizno



netačno a precizno



neprecizno i netačno

Apsolutna greška merenja jednaka je razlici između vrednosti merene fizičke veličine i tačne vrednosti fizičke veličine:

$$\Delta x = |x - x_t|,$$

gde je x vrednost merene veličine a x_t dogovorena/usvojena tačna vrednost fizičke veličine.

Relativna apsolutna greška definiše se kao odnos apsolutne greške merenja i tačne vrednosti merene veličine:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_t} = \frac{|x - x_t|}{x_t}.$$

Relativna greška je neimenovan broj, nema dimenziju, tako da se ova greška najčešće izražava u procentima:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_t} \cdot 100\% = \frac{|x - x_t|}{x_t} \cdot 100\%.$$

Neka je prilikom n ponovljenih direktnih merenja neke fizičke veličine izmereno n vrednosti x_1, x_2, \dots, x_n . Srednja vrednost merenja je:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ako broj merenja teži beskonačnosti, tada se srednja vrednost približava dogovorenoj tačnoj vrednosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = x_t.$$

Apsolutna greška pojedinačnih merenja:

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|,$$

a maksimalna apsolutna greška:

$$\Delta x_{max} = \Delta x_{i max}.$$

Relativna greška pojedinačnog merenja:

$$\delta_i = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}} = \frac{|x_i - \bar{x}|}{\bar{x}}.$$

Eksperimentalno standardno odstupanje:

$$\sigma_{eksperimentalno} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Značajne cifre

Svaka cifra broja, izuzimajući nule koje služe za određivanje položaja decimalnog zareza (tačke) naziva se *značajna* cifra.

Broj značajnih cifara nekog broja može se odrediti na osnovu sledećih pravila:

- Sve cifre datog broja različite od nule su značajne cifre.

7,845 – (4), 486,366 – (6), 15 – (2), 8×10^{15} – (1)

- Nula (ili više nula) između drugih cifara je značajna cifra.

1,012 – (4), 3900,22 – (6), 102 – (3)

- Nula na kraju broja iza decimalnog zareza je značajna cifra.

1,120 – (4), 44,000 – (5), 102,020 – (6)

- Nula na početku broja nije značajna cifra, ona samo određuje red veličine

$0,121 - (3)$, $0,004080 - (4)$, $0,00485 - (3)$

- Nula na kraju broja bez decimalnog zareza može, a i ne mora biti značajna cifra.

$12300 - (5)$, $12,300 \times 10^3 - (5)$, $12,3 \times 10^3 - (3)$

Da bi se uklonila dilema o broju značajnih cifara, velike brojeve treba pisati pomoću dekadnog eksponenta.

Zaokruživanje rezultata merenja

Pravila zaokruživanja:

- Ako je prva cifra koja se odbacuje 0, 1, 2, 3 ili 4, poslednja zadržana cifra se ne menja.
- Ako je prva cifra koja se odbacuje 6, 7, 8 ili 9, poslednja zadržana cifra se povećava za jedan.
- Ako je prva cifra koju treba odbaciti 5, a iza nje ima još cifara koje su različite od nule, tada se poslednja zadržana cifra povećava za jedan.
- Ako je prva i jedina cifra 5 koju treba odbaciti, a iza nje nema više cifara ili su nule, tada se zadnja zadržana cifra koja ostaje uvećava se za jedan ako je neparna, a ne menja se ako je parna.

Primeri zaokruživanja:

$\pi \approx 3,141\ 592\ 653\ 589 \approx 3,141\ 592\ 653\ 6$ – deset decimala

$\approx 3,141\ 592\ 65$ - sedam decimala

$\approx 3,141\ 59$ - pet decimala

$\approx 3,142$ – tri decimale

$\approx 3,14$ - dve decimale

$7,485 \approx 7,48$

$7,475 \approx 7,48$

$82\ 330 \approx 82\ 300$

$439\ 010\ 000 \approx 439\ 000\ 000$

Zaokruživanje grešaka

Apsolutna greška se uvek zaokružuje na jednu, a najviše na dve značajne cifre i to:

- Jedna značajna cifra se ostavlja, ako je prva cifra različita od nule veća od jedinice (2-9)
- Dve značajne cifre se mogu ostaviti, ako je prva cifra različita od nule jednaka jedinici.

Pri zaokruživanju apsolutne greške primenjuje se pravilo majorizacije, po kome se greška uvek zaokružuje na veću cifru, osim ako je prva cifra koju treba odbaciti nula.

Relativna greška se uvek zaokružuje na dve značajne cifre.

$$\Delta x = 0,023 \quad \Delta x \approx 0,03$$

$$\Delta x = 0,048 \quad \Delta x \approx 0,05$$

$$\Delta x = 2,34 \quad \Delta x \approx 3$$

$$\Delta x = 34,74 \quad \Delta x \approx 40$$

$$\Delta x = 0,0124 \quad \Delta x \approx 0,013$$

$$\Delta x = 17,28 \quad \Delta x \approx 18$$

Predstavljanje rezultata merenja

Rezultati merenja i izračunavanje veličina, kao i greške merenja prikazuju se tabelarno. U tabeli svaka kolona sadrži oznaku fizičke veličine i jedinicu kojom se ona izražava.

Pravilno zaokružene vrednosti rezultata i greške se koriste kada se one eksplicitno izražavaju, samostalno ili u tabeli. Međutim, ako se brojne vrednosti rezultata i greške koriste kao međurezultati za dalja izračunavanja, treba koristiti vrednosti sa jednom cifrom više od zaokružene vrednosti.

Konačan rezultat merenja se predstavlja u vidu zagrade u kojoj figuriše najbolje procenjena vrednost i greška, a van zagrade odgovarajuća jedinica.

Za jedno direktno merenje rezultat se izražava u obliku:

$$x = x_1 \pm \Delta x,$$

gde je greška Δx određena na osnovu tačnosti instrumenta (npr. vrednost najmanjeg podeoka na termometru, ili vrednost na osnovu upustva kod digitalnih instrumenata).

Ako je izvršeno više direktnih merenja, onda se rezultat merenja izražava kao

$$x = \bar{x} \pm \sigma.$$

Kada je broj merenja manji od 5, tada se rezultat merenja izražava ~~na sledeći način~~ kao:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{max}.$$

Rezultat se uvek zaokružuje tako da ima poslednju značajnu cifru na dekadnom mestu značajne cifre apsolutne greške (ili na mestu druge značajne cifre apsolutne greške, ako je ona zaokružena na 2 značajne cifre).

Rezultat i greška se uvek zapisuju na isti način, tj. sa istim dekadnim eksponentom i naravno sa istim jedinicama.

Primer:

Izračunata srednja vrednost merenja $\bar{x} = 12,2325$ m.

Izračunata maksimalna apsolutna greška merenja $\Delta x_{max} = 0,03345$ m.

Prvo zaokružimo apsolutnu grešku pravilom majoriranja $\Delta x \approx 0,04$ m.

Zatim zaokružimo srednju vrednost (pravilom broja 5) na istu tačnost kao i zaokruženu vrednost apsolutne greške (poslednja značajna cifra srednje vrednosti je na istom dekadnom mestu značajne cifre apsolutne greške),
 $\bar{x} \approx 12,23$ m.

Rezultat merenja se sada može napisati kao:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{max}$$
$$x = (12,23 \pm 0,04) \text{ m}$$

Primeri

1. Sila je merena dinamometrom i dobijeni su sledeći rezultati:

$$F_1 = 17,0 \text{ N},$$

$$F_1 = 16,8 \text{ N},$$

$$F_1 = 16,9 \text{ N},$$

$$F_1 = 16,7 \text{ N},$$

$$F_1 = 17,2 \text{ N}.$$

Odrediti srednju vrednost merenja (F_{sr}), maksimalno odstupanje od srednje vrednosti (ΔF_{max}), relativnu grešku merenja, apsolutnu grešku merenja i rezultat merenja zapisati sa greškom, na pravilan način.

1. Srednja vrednost merenja je $F_{sr} = \frac{F_1+F_2+F_3+F_4+F_5}{5} = 16.92 \text{ N}$. Odstupanja pojedinačnih rezultata od srednje vrednosti su

$$\Delta F_1 = |F_{sr} - F_1| = 0,08 \text{ N},$$

$$\Delta F_2 = |F_{sr} - F_2| = 0,12 \text{ N},$$

$$\Delta F_3 = |F_{sr} - F_3| = 0,02 \text{ N},$$

$$\Delta F_4 = |F_{sr} - F_4| = 0,22 \text{ N},$$

$$\Delta F_5 = |F_{sr} - F_5| = 0,28 \text{ N},$$

$$\Delta F_{max} = 0,28 \text{ N} \approx 0,3 \text{ N}.$$

Na osnovu zaokružene vrednosti ΔF_{max} vrši se zaokruživanje srednje vrednosti $F_{sr} \approx 16,9 \text{ N}$, pa se rezultat merenja može napisati kao $F = (16,9 \pm 0,3) \text{ N}$.

Relativna greška je:

$$\delta F = \frac{\Delta F_{max}}{F_{sr}} \cdot 100\% = \frac{0,28}{16,92} \cdot 100\% = 1,7 \%$$

2. Da bi odredili atmosferski pritisak u školi učenici su ga merili u pet učionica. U tabeli 1 su prikazani rezultati merenja. Koliki su pritisak izmerili? Rezultat izraziti sa apsolutnom greškom. Odrediti relativnu grešku merenja pritiska.

merenje	P [kPa]
1	100,9
2	99,7
3	100,2
4	99,9
5	100,6

2. Srednja vrednost atmosferskog pritiska je:

$$p_{sr} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}{5} = 100,26 \text{ kPa}$$

merenje	P [kPa]	$ P_{sr} - P $ [kPa]
1	100,9	0,64
2	99,7	0,56
3	100,2	0,06
4	99,9	0,36
5	100,6	0,34

Maksimalna apsolutna greška je $\Delta p_{max} = 0,64 \text{ kPa} \approx 0,7 \text{ kPa}$. Na osnovu apsolutne greške zaokružujemo srednju vrednost $p_{sr} = 100,3 \text{ kPa}$, pa se rezultat merenja može napisati kao $p = (100,3 \pm 0,7) \text{ kPa}$. Relativna greška je:

$$\delta p = \frac{\Delta p_{max}}{p_{sr}} \cdot 100\% = \frac{0,64}{100,26} \cdot 100\% \approx 0,64 \%$$

Literatura

- Ljubiša Nešić, Praktikum eksperimentalnih vežbi iz fizike, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2007
- Zoran Pavlović, Beleške sa predavanja iz predmeta „Metrologija i obrada rezultata merenja“
- Marko Jelić, Priručnik za izradu misaonih eksperimentalnih zadataka iz fizike, Beograd, 2016