

## Школски огледи из области осцилација

Миодраг К. Радовић, Драган Ђ. Радивојевић

*Природно-математички факултет у Нишу, Вишеградска 33, 18000 Ниш*

**Апстракт.** Овде је приказано неколико огледа из области осцилација, који захтевају веће ангажовање ученика како у извођењу огледа тако и у примени математичког апарата. Анализирани су услови осциловања физичког клатна, осциловање торзионог клатна, спрегнуто осциловање два клатна, амортизоване и принудне осцилације.

**Кључне речи:** осцилације, клатно, резонанца.

### ОСЦИЛОВАЊЕ ФИЗИЧКОГ КЛАТНА

Физичко клатно је свако круто тело које осцилује око непокретне хоризонталне осе у пољу силе Земљине теже. При том се његово тежиште налази на неком растојању  $l$  изван тачке ослона. Ово растојање се дефинише као „редукована дужина физичког клатна“. Осциловање физичког клатна се описује диференцијалном једначином:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \cdot \varphi = 0, \quad (1)$$

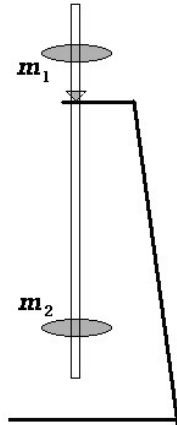
где је са  $I$  је означен момент инерције тела, а са  $\varphi$  угао одклона. Две тачке изнад променљиве означавају други извод по времену. Решење ове једначине је периодична функција са угаоном фреквенцом:  $\omega^2 = (mgl)/I$ . Обично, клатно започиње осциловање из амплитудног положаја, па ће осциловати по закону:

$$\varphi = \varphi_A \cos(\omega \cdot t). \quad (2)$$

Како је по дефиницији  $\omega = 2\pi/\tau$ , то следи да је период:  $\tau = 2\pi\sqrt{I/(mgl)}$ . Одавде следи да се на основу мерења периода осциловања физичког клатна и познавањем његове масе и редуковане дужине, може одредити његов момент инерције. Ово је погодно у случајевима када тело има неправилну форму и распоред маса. Из израза за период осциловања следи да се момент инерције може одредити као:

$$I = mgl \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2. \quad (3)$$

У овом огледу, користи се дрвена летва са два гвоздена тега који се могу померати дуж ње што је шематски приказано на слици 1. На око 1/4 летве је монтиран ослонац такав да омогућава неометано осциловање летве. Тегови се налазе са једне и друге стране ослонаца.



СЛИКА 1. Физичко клатно.

У овом случају посматрамо тело које се састоји од три дела, летва и два тега. Ово тело има јединствено тежиште (чији положај зависи од распореда тегова). Од овог распореда ће зависити вредност редуковане дужине, периода осциловања и укупног момента инерције тела.

Масе тегова могу бити дате или се измере на почетку мерења, као и маса саме летве.

За сваки положај „доњег тег“ треба провести комплетну процедуру мерења и срачунавања а погодно је да се резултати уписују у одговарајућу табелу. (Претпоставка је да су тела хомогена са тежиштима у њиховим геометријским средиштима.) Генерално, најпре треба одредити тежиште система који се састоји од летве и два тег (Слика 1.).

Задатак се поједностављује ако се „горњи тег“, чија је вредност масе  $m_{T1}$ , фиксира у положају  $l_{T1}$ . У експерименту се помера „доњи тег“ ( $m_{T2}, l_{T2}$ ) у односу на ослонац (од најудаљеније тачке на летви до неког малог растојања при коме је цео систем још увек у стабилној равнотежи).

Положај укупног тежишта се налази преко једнакости масених момената са његове једне и друге стране од ослонаца. Код стабилне равнотеже, укупно тежиште се налази са доње стране од ослонаца где се налазе и тежиште „доњег тег“ и тежиште летве са параметрима ( $m_L, l_{TL}$ ). Одавде се, тражена редукована дужина клатна за дату позицију „доњег тег“ одређује као:

$$\ell = \frac{m_{T2} \cdot l_{T2} + m_L \cdot l_{TL} - m_{T1} \cdot l_{T1}}{m_L + m_{T1} + m_{T2}}. \quad (4)$$

За сваку конфигурацију тегова се измери укупно време  $t_n$  за које клатно изврши „ $n$ “ пуних осцилација (20 до 50) и одатле одреди период осциловања  $\tau$  по формули  $\tau = t_n / n$ .

На основу датог израза за период осциловања, сада се може одредити момент инерције тела:  $I = mg\ell \cdot (\tau / 2\pi)^2$ .

Резултати мерења се могу приказати графички као зависност измереног периода осциловања од редуковане дужине клатна  $\tau = f(\ell)$  и зависност момента инерције од редуковане дужине  $I = f(\ell)$ .

Облик ових зависности се може проценити ако се има у виду Штајнерова теорема:  $I = I_o + m\ell^2$ . Момент инерције може само да расте са порастом  $\ell$  од неке почетне вредности.

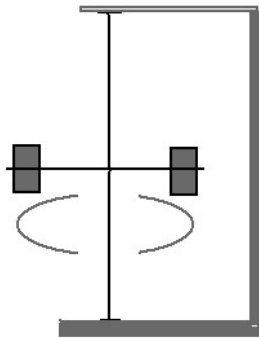
Облик функције  $\tau = \tau(\ell)$  је мало сложенији и може се предвидети користећи израз:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mg\ell} + \frac{\ell}{g}}. \quad (5)$$

За мало  $\ell$  (када  $\ell$  тежи нули), други сабирак тежи нули а први расте ка бесконачности. Дакле, период осциловања расте. Са друге стране, када је  $\ell$  велико, први сабирак има све мањи значај (тежи нули), па ће ово клатно осциловати попут математичког, а период осциловања расте. Ову зависност треба потврдити огледом.

## ОСЦИЛОВАЊЕ ТОРЗИОНОГ КЛАТНА

Торзија (увртање) је специјални случај еластичне деформације као последице деловања момента сила које делују на еластично тело. Момент сила доводи до тангенцијалних напона који је на оси нула а расте према периферији тела. Еластичне силе ће тежити да тело врате у првобитни положај што доводи до осциловања тела. Пример за ово је торзионо клатно, које је приказано на слици 2..



СЛИКА 2. Торзионо клатно.

Код торзионог клатна (Слика 2.), жица је причвршћена на оба краја док је по средини фиксиран метални носач (шипка) на чијим се крајевима налази по један тег (тегови су по правилу једнаких маса и налазе се на једнаким растојањима од жице).

Ако се тегови изведу из равнотежног положаја и пусти да осцилује, клатно ће осциловати у хоризонталној равни са неким периодом осциловања  $\tau$ .

Жица дужине  $l$ , и полупречника  $r_0$ , уврнуће се деловањем момента силе  $M$  за неки угао  $\alpha$  на месту деловања момента (средина жице). Истовремено жица је остала у почетном положају на страни која је фиксирана (у овом случају то су оба краја жице).

Еластични момент силе је пропорционалан углу увртања  $\alpha$ :  $M = c' \cdot \alpha$ , где је са  $c'$  означена торзиона константа. Момент силе ће узроковати осциловање клатна са периодом осциловања:

$$\tau = 2\pi\sqrt{I/c'}, \quad (6)$$

где је са  $I$  је означен момент инерције клатна. Одавде је:

$$c' = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot I. \quad (7)$$

Веза између модула торзије  $E_s$  и торзионе константе, за случај да је један крај жице фиксиран а да на други делује момент силе је:

$$c' = \frac{M}{\alpha} = \frac{\pi \cdot E_s}{2l} \cdot r_0^4. \quad (8)$$

Како је шипка са теговима фиксирана на половини дужине жице, то је растојање увртања жице два пута мање. Истовремено ће се укупни момент удвостручити, пошто на централни део жице делују momenti сила насталих увртањем горњег и доњег дела жице, то ће и настали ефект бити двоструко већи. Због тога последњи израз треба помножити са фактором 2. Тако се добија:

$$c' = \frac{2M}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot E_s}{2(l/2)} \cdot r_o^4 = \frac{2\pi \cdot E_s}{l} \cdot r_o^4. \quad (9)$$

Из последњег израза и везе константе  $c'$  са периодом осциловања, следи:

$$E_s = \frac{l}{2\pi \cdot r_o^4} \cdot c' = \frac{2\pi \cdot l}{T^2 r_o^4} \cdot I. \quad (10)$$

Момент инерције клатна је збир момената инерције шипке и тегова на њеним крајевима. Познато је да момент инерције штапа дужине  $L$  и масе  $m$ , у односу на осу нормалну на средину износи:  $I = (1/12)mL^2$ . Сваки од тегова на крајевима масе  $m_t$  ће имати момент инерције:  $I_t = m_t d^2$ , где је са  $d$  означено растојање од централне жице до положаја тежишта тегга. Укупни момент инерције клатна је тако:

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + 2m_t d^2. \quad (11)$$

На основу измерених вредности може се израчунати момент инерције клатна а затим и тражени модуо торзије материјала од кога је направљена жица.

Како се тегови могу померати по шипци, то се у огледу може и проверити утицај овог растојања на момент инерције и период осциловања клатна.

## ПРИГУШЕНЕ ХАРМОНИЈСКЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Код сваког реалног осцилаторног система сила трења или сила отпора средине се не може избећи, па је свако реално осциловање мање или више пригушено (амортизовано). Претпоставка је да је сила отпора средине сразмерна брзини кретања (што важи за мале брзине) а може се записати као:  $F = -b\dot{x}$ , па једначина кретања осцилатора има облик:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}. \quad (12)$$

Означимо основну угаону учестаност осцилација са  $\omega_o$ , ( $k = m\omega_o^2$ ). Такође се показује да је погодна смена:  $b = 2m\beta$ . Након овога претходни израз постаје:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (13)$$

Однос величина  $\omega_o$  и  $\beta$  дефинисаће различите врсте пригушења. У случају да је  $\beta < \omega_o$ , пригушење је мало а осциловање је *квази-периодично*. Решење претходне једначине у овом случају је једначина кретања:

$$x(t) = A_o \exp(-\beta t) \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (14)$$

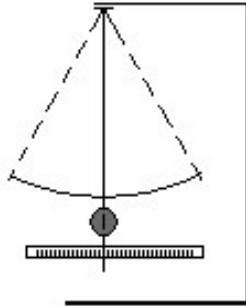
Осциловање се одвија са угаоном учестаношћу  $\omega$  која се разликује од  $\omega_o$ . Њихов однос је:  $\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2$ . Амплитуда осциловања опада експоненцијално са временом и описана је изразом:  $A(t) = A_o \exp(-\beta t)$ .

Код пригушеног осциловања уводи се и појам *декремент пригушења*, као однос две узастопне амплитуде:

$$k = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \exp(\beta T). \quad (15)$$

Логаритам претходног израза је познат као: **логаритамски декремент пригушења**:

$$\delta = \ln k = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (16)$$



СЛИКА 3. Клатно које осцилује амортизованим осцилацијама.

Овај експеримент се може ефикасно реализовати на два начина. Један је да се тело које осцилује постави у средину са већим коефицијентом трења (на пример у суд са водом), а други је да тело осцилује у ваздуху али да се изабере такав облик, да је сила отпора ваздуха значајна што и у једном и у другом случају доводи до пригушеног осциловања које је очигледно и мерљиво.

Оглед се изводи са клатном у ваздуху чије су димензије такве да се пригушење не може занемарити.

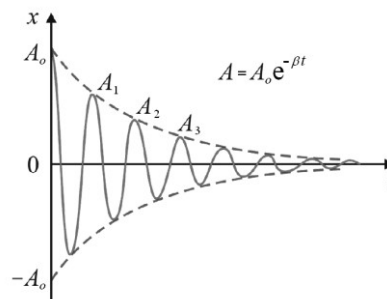
Најпре се одреди период осциловања. Затим се приступа мерењу амплитуда осциловања.

Клатно се изведе из равнотежног положаја ( $t = 0: A = A_0$ ) и пусти да осцилује. Очитава се вредност амплитуде након сваке пуне осцилације и вредности се уносе у одговарајућу табелу.

Мерења се понављају више пута а очитане вредности за сваку амплитуду усредњавају.

На основу измерених вредности, скицира се график осциловања. Облик ове зависности је приказан на слици 4.

На основу измерених и усредњених вредности узастопних амплитуда, срачунава се логаритамски декремент пригушења  $\delta$ , на основу њега коефицијент пригушења  $\beta$ ,



СЛИКА 4. Трајекторија код пригушеног осциловања.

## ПРИНУДНО ХАРМОНИЈСКО ОСЦИЛОВАЊЕ

Тела поседују неку основну фреквенцу осциловања око задате осе (као што је то случај са физичким или математичким клатном). Уколико на тело (или неки осцилаторни систем) делује спољашња периодична сила, она ће узроковати његово принудно осциловање. У том случају амплитуда осциловања ће зависити од усклађености фреквенце побудне силе  $\omega_F$  и сопствене фреквенце осциловања тела  $\omega_0$ .

Претпоставимо да се принудна сила мења по периодичном закону:  $f = F_o \cdot \cos \omega_F t$ . На тело ће деловати још и еластична сила:  $f_k = -k \cdot x$  и сила отпора средине:  $f_\eta = -\eta \cdot \dot{x}$ . У овом случају, диференцијална једначина кретања добија облик:

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + F_o \cos \omega_F t. \quad (17)$$

Погодно је увести смену да је:  $k/m = \omega_o^2$  али и  $\eta/m = 2\beta$ , као и  $F_o/m = f_o$ . Након тога, једначина кретања добија облик:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \cos \omega_F t. \quad (18)$$

Последња једначина је нехомогена диференцијална једначина. Левим делом ове једначине се описује пригушено осциловање са степеном пригушења  $\beta$  (претпоставићемо да је пригушење мало ( $\beta < \omega_o$ )). Али на десној страни није нула већ управо нехомогени део једначине. Опште решење је облика:

$$x = A_o \exp(-\beta t) \cos(\omega_F t + \phi) + x_p. \quad (19)$$

Уколико је тело у почетном тренутку било у миру, оно ће почети да осцилује у зависности од односа између његове сопствене фреквенце и фреквенце и амплитуде принудне силе. Партикуларно решење је:  $x_p = A \cos(\omega_F t + \phi)$ .

Након налажења првог и другог извода по времену и заменом у почетни израз, долази се до система једначина:

$$\begin{aligned} A(\omega_o^2 - \omega_F^2) \cos \phi - 2\beta A \omega_F \cdot \sin \phi &= f; \\ A(\omega_o^2 - \omega_F^2) \sin \phi + 2\beta A \omega_F \cdot \cos \phi &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из друге једначине следи вредност фазе:

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{2\beta \omega_F}{\omega_o^2 - \omega_F^2}, \quad (21)$$

док веза између једначина (збир њихових квадрата) даје вредност амплитуде принудних осцилација:

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_F^2)^2 + 4\beta^2 \omega_F^2}}. \quad (22)$$

Амплитуда принудних осцилација сразмерна је амплитуди периодичне силе која делује, док се отпор средине јавља као ограничавајући фактор.

Амплитуда принудних осцилација ће се повећавати ако се смањује разлика у фреквенцијама принудне силе и посматраног тела. Теоријски посматрано, ако покретачка сила има исту фреквенцу као што је и сопствена фреквенца осциловања тела и делује довољно дуго, амплитуда осциловања тела може да неограничено порасте, односно до мере коју дефинише отпор средине.

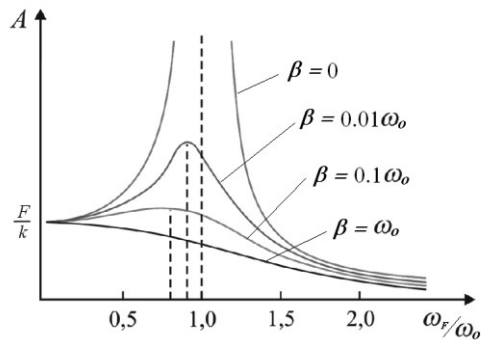
Амплитуда принудних осцилација ће имати максимум када је фреквенца принудне силе:

$$\omega_{F,r}^2 = \omega_o^2 - 2\beta^2. \quad (23)$$

Док ће резонантна амплитуда бити једнака:

$$A_r = \frac{f}{2\beta \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}. \quad (24)$$

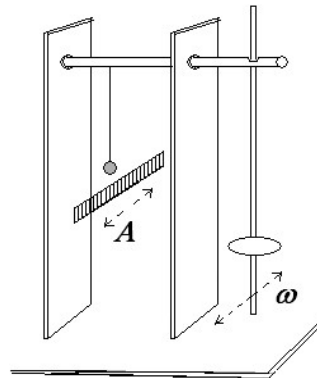
Наведене зависности показују да ће фреквенца резонантног осциловања бити све ближа сопственој фреквенци осциловања тела а амплитуда бити све већа, што је коефицијент отпора средине мањи. На слици 5. је приказан ток зависности амплитуде од односа фреквенци принудне силе и сопствене фреквенце тела за неке вредности отпора средине.



СЛИКА 5. Зависност амплитуде од фреквенце принудне силе.

У овде описаном експерименту се мери амплитуда осциловања математичког клатна које се у почетном тренутку налази у стању мировања. На њега се може пренети деловање периодичне силе која потиче од осциловања физичког клатна. Физичко клатно је масивно па се сматра да је његова фреквенца стабилна у току мерења. Деловање на математичко клатно се остварује преко осовине. Ово је приказано на слици 6..

Математичко клатно има своју фреквенцу осциловања  $\omega_0$  док физичко клатно осцилује са фреквенцом  $\omega$  која се може мењати (мењањем редуковане дужине) у задатим оквирима. При том је важно обезбедити да фреквенца осциловања физичког клатна (које врши побуду) може бити мања или већа од  $\omega_0$ . Такође треба обезбедити да амплитуда осциловања физичког клатна буде стална. Мери се временски период осцилација физичког клатна, одакле се срачунава његова фреквенца.



СЛИКА 6. Приказ огледа.

Ове осцилације се преносе на математичко клатно. Оно ће почети да осцилује

у складу са законитостима које су претходно изнете. Његова амплитуда осциловања се мери према референтном лежиру а резултати уносе у одговарајућу табелу.

На основу података из табеле треба нацртати график који показује промену амплитуде осциловања „ $A$ “ математичког клатна у функцији фреквенце физичког клатна (принудне силе  $\omega$ ).

Очекивана зависност је приказана на слици 5.. Са добијеног графика се може проценити сопствена фреквенца осциловања математичког клатна  $\omega_0$ .

### СЛАГАЊЕ ОСЦИЛАЦИЈА ДВА КЛАТНА

Може се јавити случај када су у механичкој вези два тела која могу осциловати истовремено, свако неком својом основном фреквенцом. Њихово укупно (спрегнуто) осциловање ће се одвијати на сложен начин, (зависиће од сопствених фреквенци, амплитуда и фаза) што се у неким случајевима може детаљно анализирати.

Овде је приказан случај везе физичког и хармонијског клатна. Овај оглед спада у оне који се могу извести у лабораторији и њиме демонстрирати пренос и очување енергије при осциловању у изолованом механичком систему.

Анализу осциловања ћемо започети са увидом у ситуацију када клатна мирују. У равнотежном стању, издужење опруге износи  $(x_o - s_o)$ , и тада је:  $mg = -k(x_o - s_o)$ .

У равнотежном стању, котур је заротиран за неки угао због деловања момента силе који производи опруга са тегом. На другој страни се појављује момент силе услед деловања физичког клатна које је сада отклоњено за неки угао.

Котур је у миру што значи да постоји једнакост момената који делују на њега. Према ознакама на слици биће:  $k(x_o - s_o) \cdot R = m'g \ell \sin \phi_o$ . За мале углове ће бити:  $\sin \phi \cong \phi$ , а очигледно је:  $s_o = R \cdot \phi_o$ .

Када систем није у равнотежи физичко клатно ће осциловати око положаја  $\phi_o$  под деловањем момената сила а што се описује једначином:

$$I \ddot{\phi} + m'g \ell \cdot \phi = kR(x - s). \quad (25)$$

Хармонијско клатно ће осциловати око положаја  $x_o$  у складу са деловањем силе еластичности опруге:

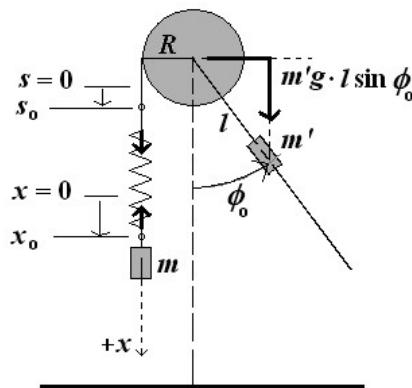
$$m \ddot{x} = -k(x - s). \quad (26)$$

На самом почетку мерења, подесе се (избором масе тега на опрузи и померањем положаја тега физичког клатна) њихови периоди осциловања тако да су једнаки. Ово се описује изразима:

$$\frac{k}{m} = \omega_o^2, \text{ као и } \frac{m'g \ell}{I} = \omega_o^2. \quad (27)$$

Треба имати у виду да постоји директна зависност:  $s = R \cdot \phi$ . Уводећи ознаку:  $mR^2 I^{-1} = \delta$ , коначно се добија:

$$\ddot{\phi} + \omega_o^2 (1 + \delta) \cdot \phi = \omega_o^2 \delta \frac{1}{R} \cdot x,$$



СЛИКА 7. Сложено осциловање.



$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 \cdot R\phi. \quad (28)$$

У огледу, осциловање система почиње тако што се физичко клатно отклони за амплитудни угао и пусти да осцилује. Његово ће се осциловање у току времена описати косинусном функцијом. При том, преко котура, долази до помераја тачке вешања хармонијског клатна „s“ која осцилује као и физичко клатно па тако започиње своје осциловање из максималног отклона.

Хармонијско клатно своје осциловање започиње из стања мировања, покренуто деловањем физичког клатна.

Полазећи од система једначина 28, могу се одредити партикуларна решења за два мода осциловања система као:  $\omega_1^2 = \omega_o^2(1 + 2\delta)$  и  $\omega_2^2 = \omega_o^2$ .

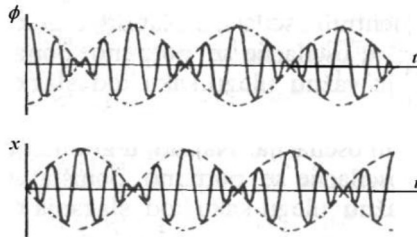
Фазе таласа ће осциловати као средње вредности ових угаоних фреквенци. Осциловање два клатна се може описати релацијама:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_o + \phi_A \cos\left[\frac{\omega_o\sqrt{1+2\delta} - \omega_o}{2} \cdot t\right] \cos\left[\frac{\omega_o\sqrt{1+2\delta} + \omega_o}{2} \cdot t\right], \\ x &= x_o + x_A \sin\left[\frac{\omega_o\sqrt{1+2\delta} - \omega_o}{2} \cdot t\right] \sin\left[\frac{\omega_o\sqrt{1+2\delta} + \omega_o}{2} \cdot t\right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Згодно је ради мерења у лабораторији да се са угаоних фреквенци пређе на периоде осциловања. Када се уведе период осциловања амплитуде  $\tau_A$  и период осциловања фазе  $\tau_f$ , њихово осциловање се може описати изразима:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_o + \phi_A \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau_A}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau_f}\right), \\ x &= x_o + x_A \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau_A}\right) \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau_f}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Њихове амплитуде и фазе ће се мењати са временом у зависности од тога да ли су у фази побуде или у фази пригушења као и вредности параметара огледа а пре свега величине полупречника тачка R. Очекивана зависност која се региструје у огледу је приказана на наредној слици:



СЛИКА 8. Очекивана зависност осциловања два клатна.

Укупна енергија овог система је ограничена почетним условима и стална у току извођења огледа (уз неминовну амортизацију са временом услед трења). Из тога следи да је:

$$\left(\frac{x}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{\phi}{\phi_A}\right)^2 = 1. \quad (31)$$

Оба клатна не могу истовремено имати амплитудне вредности. Заправо, када отклон једног клатна има амплитудну вредност, елонгација другог је нула. То се може успешно демонстрирати у описаном огледу.

У оквиру овог огледа могу се пратити промене амплитуде једног и другог клатна, регистровати вредности узастопних елонгација као и мерити вредности периода осциловања амплитуда. На основу ових података може се конструисати графички приказ осциловања. Генерално, зависност ових осцилација треба да има ток као што је то овде приказано на слици 8. (уз опадање амплитуде услед трења).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Фриш, С. Е. и Тиморјева, А. В., Курс опште физике, књига 1, Београд, Завод за издавање уџбеника СР Србије, 1969
2. Вучић, В., Ивановић Д., Физика 1, Београд, Научна књига, 1970
3. Фејман Р., Леитон Р, Сендс М., Фејмановские лекции по физике, Москва, Мир, 1977

## School experiments on oscillations

Miodrag K. Radović , Dragan Đ. Radivojević

**Abstract:** A few experiments on oscillation, which require bigger commitment from the students in both performing the experiment and using mathematical knowledge is shown in this paper. However, the laws of physics, which are visibly demonstrated, justify the invested effort. The conditions of oscillation of physical pendulum and the oscillation of torsion pendulum are analyzed. Also the oscillation in the case when amortization due to the effect of compulsory periodic force and coupled oscillation of two pendulums are analyzed too.

**Keywords:** oscillation, pendulum, resonance