РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

1. (а) Момент инерције сфере је $I_0 = nM\frac{2}{5}r^2$ $\boxed{\text{3 п}}$. Применом Штајнерове теореме добијамо $I = I_0 + 5nMr^2 = nM\frac{127}{5}r^2$ $\boxed{\text{3 п}}$, те је $\frac{I}{n} = M\frac{127}{5}r^2 = 1.84\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{kgm}^2}{\text{mol}}$ $\boxed{\text{2 п}}$.

   (б) Унутрашња енергија идеалног гаса је $U = nC_vT = n\frac{R}{\gamma-1}T$ $\boxed{\text{3 п}}$ где смо искористили чињеницу да је $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$. Применом закона одржања енергија на гас који ротира и који је заустављен имамо $U_i + \frac{I\omega^2}{2} = U_f$ $\boxed{\text{4 п}}$ тј. $\Delta U = \frac{I\omega^2}{2}$ где смо гас посматрали као ротирајућу сферу. Одавде следи да је промена температуре $\Delta T = \frac{I\omega^2(\gamma-1)}{2nR}$ $\boxed{\text{3 п}}$. За коначан израз имамо $\Delta T = \frac{127Mr^2\omega^2(\gamma-1)}{10R} = 0.04\,\text{K}$ $\boxed{\text{2 п}}$.

2. Како се неон налази у термално изолованом суду, следи да је $q_d = 0$ $\boxed{\text{2 п}}$. Унутар суда унутрашња енергија неона је $u_1 = \frac{C_VT}{M} = \frac{RT}{M(\gamma-1)}$ $\boxed{\text{3 п}}$ и једначина стања $p_1 = \frac{RT\rho}{M}$ $\boxed{\text{3 п}}$. Брзина неона у суду је занемарљива, тј. $v_1 = 0$, јер се молекули неона крећу у свим правцима $\boxed{\text{2 п}}$. Уз отвор изван суда имамо да је $p_2 = 0$ $\boxed{\text{2 п}}$ и $u_2 = 0$ $\boxed{\text{2 п}}$. Ако је брзина гаса ван суда $v = v_2$ применом Бернулијеве једначине са леве и десне стране отвора имамо $\frac{p_1}{\rho} + u_1 = \frac{v_2^2}{2}$ $\boxed{\text{4 п}}$. Убацивањем формула за u_1 и p_1 добијамо: $\frac{p_1}{\rho} + u_1 = \frac{RT}{M} + \frac{RT}{M(\gamma-1)} = \frac{\gamma RT}{M(\gamma-1)}$, те одавде следи да је брзина којом неон истиче из суда $v = \sqrt{\frac{2\gamma RT}{M(\gamma-1)}} = 1.019\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ $\boxed{\text{2 п}}$.

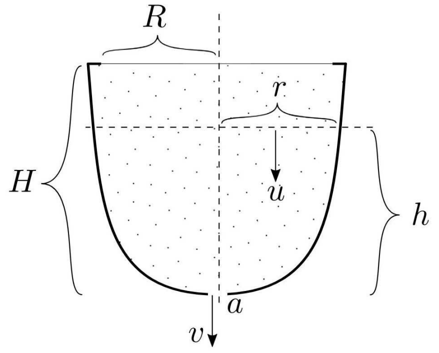
3. (а) Систем ће бити у равнотежи када се притисци натријумових јона у обе области изједначе $\boxed{\text{1 п}}$. Пошто су запремине и температуре једнаке, то значи да ће половина натријумових јона продрети у другу олбаст $\boxed{\text{1 п}}$. На почетку процеса, једначина стања у првој области гласи $pV = (m_1/M_1 + m_2/M_2)\,RT$ $\boxed{\text{3 п}}$. На крају транспорта, у првој области имамо $p_1V = (m_1/(2M_1) + m_2/M_2)\,RT$ $\boxed{\text{3 п}}$, при чему је $p_1 = kp$ и $k = 1 - 0.13 = 0.87$ $\boxed{\text{1 п}}$. Поделивши другу једначину првом, имамо $k = (m_1/(2M_1) + m_2/M_2)/(m_1/M_1 + m_2/M_2)$ $\boxed{\text{2 п}}$ што даје $m_1/m_2 = \frac{(2-2k)M_1}{(2k-1)M_2}$ $\boxed{\text{1 п}}$. Заменом бројева добијамо $m_1/m_2 = 0.207$ $\boxed{\text{2 п}}$.

   (б) Имамо $\dfrac{1}{\sigma_1} = \dfrac{1}{\sigma_{11}} + \dfrac{1}{\sigma_{12}} = \dfrac{4r_1^2 + (r_1+r_2)^2}{4\pi r_1^2(r_1+r_2)^2}$ и слично $\dfrac{1}{\sigma_2} = \dfrac{4r_2^2 + (r_1+r_2)^2}{4\pi r_2^2(r_1+r_2)^2}$ $\boxed{\text{3 п}}$ те имамо да је однос средњих слободних путева једнак $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = \dfrac{(4r_1^2 + (r_1+r_2)^2)r_2^2}{(4r_2^2 + (r_1+r_2)^2)r_1^2} = 1.4$ $\boxed{\text{3 п}}$.

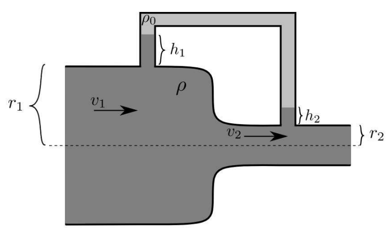
4. (а) Нека је брзина спуштања нивоа u, а брзина истицања v (слика 1). Из Бернулијеве једначине имамо $\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$ $\boxed{\text{3 п}}$, тј. $v = \sqrt{2gh}$ $\boxed{\text{2 п}}$ (занемаримо члан $\frac{\rho u^2}{2}$). Из једначине континуитета добијамо $ur^2 = va$ $\boxed{\text{3 п}}$ тј. $u = \frac{\sqrt{2gh}a}{r^2}$. Пошто је u константно следи $u = \frac{\sqrt{2gH}a}{R^2}$ $\boxed{\text{3 п}}$ те следи $\frac{\sqrt{h}}{r^2} = \frac{\sqrt{H}}{R^2}$ тј. $r(h) = R\sqrt[4]{\frac{h}{H}}$ $\boxed{\text{4 п}}$.

   (б) Пошто је брзина спуштања нивоа константна, следи да је $T = \frac{H}{u} = \sqrt{\frac{H}{2g}}\frac{R^2}{a}$ $\boxed{\text{5 п}}$.

5. Нека је брзина кроз другу цев v_2 (слика 2). Услед једначине континуитета имамо $v_1r_1^2 = v_2r_2^2$ $\boxed{\text{4 п}}$. Бернулијева једначина гласи $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ $\boxed{\text{4 п}}$. Нека је притисак на нивоу p_0. Тада имамо у првој цеви $p_1 = p_0 + \rho(h_1 + r_1)$ $\boxed{\text{3 п}}$, а у другој цеви $p_2 = p_0 + \rho_0(h_1 + r_1 - h_2 - r_2) + \rho(h_2 + r_2)$ $\boxed{\text{3 п}}$. Кад комбинујемо све једначине добијамо: $p_0 + \rho(h_1+r_1) + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + \rho_0(h_1 + r_1 - h_2 - r_2) + \rho(h_2+r_2) + \frac{\rho v_1^2 r_1^4}{2r_2^4}$ $\boxed{\text{3 п}}$ те следи $v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho-\rho_0)g(h_1+r_1-h_2-r_2)}{\rho\left(\frac{r_1^4}{r_2^4}-1\right)}}$ $\boxed{\text{3 п}}$.



Слика 1



Слика 2

Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Никола Петровић***, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

II разред **РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** **ОКРУЖНИ НИВО 03.03.2018.**

1. (а) Момент инерције сфере је $I_0 = nM\frac{2}{5}r^2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Применом Штајнерове теореме добијамо $I = I_0 + 5nMr^2 = nM\frac{127}{5}r^2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, те је $\frac{I}{n} = M\frac{127}{5}r^2 = 1.84\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{kgm}^2}{\text{mol}}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

   (б) Унутрашња енергија идеалног гаса је $U = nC_vT = n\frac{R}{\gamma-1}T$ $\boxed{\textbf{3 п}}$ где смо искористили чињеницу да је $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$. Применом закона одржања енергија на гас који ротира и који је заустављен имамо $U_i + \frac{I\omega^2}{2} = U_f$ $\boxed{\textbf{4 п}}$ тј. $\Delta U = \frac{I\omega^2}{2}$ где смо гас посматрали као ротирајућу сферу. Одавде следи да је промена температуре $\Delta T = \frac{I\omega^2(\gamma-1)}{2nR}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. За коначан израз имамо $\Delta T = \frac{127Mr^2\omega^2(\gamma-1)}{10R} = 0.04\,\text{K}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

2. (а) Пошто је гас (освеживач) једнодомензионалан, следи да има три степена слободе транслације и два ротације те је $j = 3+2 = 5$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, $\gamma = \frac{j+2}{j} = \frac{7}{5}$ и $C_p = \frac{(j+2)R}{2} = \frac{7R}{2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Имамо $p_1 = 4\,\text{atm}$, $p_2 = 1\,\text{atm}$ и $T_1 = T = 300\,\text{K}$. Пошто се процес истицања гаса брзо одвија следи да је адијабатски те важи $T_2/T_1 = (p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, тј. $T_2 = T_1(p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = 201.9\,\text{K}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. (Опасно хладно!)

   (б) На истицање гаса се може применити Бернулијева теорема: $p_1V_1 + nC_VT_1 = p_2V_2 + nC_VT_2 + nMv^2/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Једначине стања дају $p_1V_1 - p_2V_2 = nR(T_1-T_2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, те убацујући израз у прву једначину добијамо $nMv^2/2 = nC_p(T_1-T_2)$ ($C_p = C_V + R$) тј. $v = \sqrt{\frac{2C_pT_1}{M}(1-(p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma})} = 106.9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Маса освеживача која се избаци у интервалу дужине $t = 1\,\text{s}$ износи $m = M\pi r^2vt = 26.6\,\text{mg}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$.

3. (а) Средњи слободни пут освеживача износи $\lambda = RT/(\sqrt{2}\pi N_Ad^2p_a)$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, а коефицијент дифузије је $D = \lambda\langle v\rangle/3$, тј. $D = 2/3\times\sqrt{R^3/MN_A^2\pi^3}\times T_2^{3/2}/(p_ad^2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Ово даје $\lambda = 3.69\text{nm}$ и $D = 1.39\times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Средња брзина је дата са $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, тј. $\langle v\rangle = 112.8\text{m/s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$.

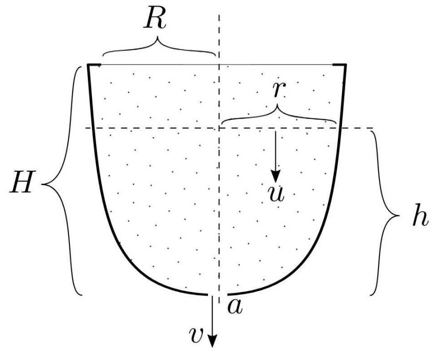
   (б) Средња концентрације у соби је $n = m/(MV) = m/(Ma_1a_2a_3)$, где су a_1,a_2,a_3 димензије собе $\boxed{\textbf{1 п}}$. Ако је градијент концентрације константан, онда се концентрација креће од $n_{max} = 2n = 2m/(Ma_1a_2a_3)$, на једном крају собе, до 0, на другом крају, а $\Delta n/\Delta x = (n_{max} - n_{min})/a_1 = 2m/(Ma_1^2a_2a_3)$ $\boxed{\textbf{5 п}}$, па је $\Delta n/\Delta x = 1.67\times 10^{-8}\text{mol/m}^4$ $\boxed{\textbf{1 п}}$.

   (в) Имамо $qm/T = DM(\Delta n/\Delta x)S$ $\boxed{\textbf{4 п}}$ па је $T = qm/(DM(\Delta n/\Delta x)S) = 3.59\times 10^6\,\text{s}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

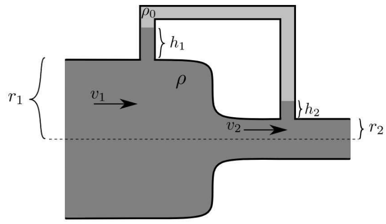
4. (а) Нека је u брзина спуштања нивоа воде, а v брзина истицања воде кроз отвор (слика 1). У оба дела задатка ћемо ради једноставности користити r као израз за радијус ћупа до коначног решења. Имамо једначину континуитета $r^2u = av$ $\boxed{\textbf{3 п}}$ и Бернулијеву једначину $\frac{\rho u^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Пошто је u константно следи $v = \frac{r^2u}{a}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Убацивањем израза у Бернулијеву једначину добијамо $\frac{\rho u^2}{2}(\frac{r^4}{a^2}-1) = \rho gh$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, тј. следи да је израз $\frac{1}{h}(\frac{r^4}{a^2}-1)$ константан, те важи $\frac{1}{h}(\frac{r^4}{a^2}-1) = \frac{1}{H}(\frac{R^4}{a^2}-1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Решавањем по r добијамо $r_1(h) = r = \sqrt[4]{a^2 + \frac{h}{H}(R^4 - a^2)}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

   (б) У овом случају пошто је v константно имамо $u = \frac{av}{r^2}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$ те убацивањем израза у Бернулијеву једначину добијамо $\frac{\rho v^2}{2}(\frac{a^2}{r^4}-1) = \rho gh$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, тј. следи да је израз $\frac{1}{h}(\frac{a^2}{r^4}-1)$ константан, те важи $\frac{1}{h}(\frac{a^2}{r^4}-1) = \frac{1}{H}(\frac{a^2}{R^4}-1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Решавањем по r добијамо $r_2(h) = r = \sqrt[4]{\frac{a^2}{1+\frac{h}{H}(\frac{a^2}{R^4}-1)}}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

5. Нека је брзина кроз другу цев v_2 (слика 2). Услед једначине континуитета имамо $v_1r_1^2 = v_2r_2^2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Бернулијева једначина гласи $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Нека је притисак на нивоу p_0. Тада имамо у првој цеви $p_1 = p_0 + \rho_0(h_2 + r_2 - h_1 - r_1) + \rho(h_1 + r_1)$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, а у другој цеви $p_2 = p_0 + \rho_0(h_1 + r_1 - h_2 - r_2)\rho(h_2 + r_2)$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Кад комбинујемо све једначине добијамо: $p_0 + \rho(h_1 + r_1) + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + \rho(h_2 + r_2) + \frac{\rho v_1^2 r_1^4}{2r_2^4}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$ те следи $v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho-\rho_0)g(h_1+r_1-h_2-r_2)}{\rho\left(\frac{r_1^4}{r_2^4}-1\right)}}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$.



Слика 1



Слика 2

Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Никола Петровић***, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд