ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије

IV разред

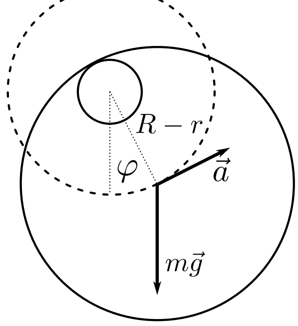
РЕШЕЊА – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

ОКРУЖНИ НИВО
3. март 2018.

1. Таласна дужина електрона је $\lambda = \frac{h}{p}$ $\boxed{3\text{п}}$, где је p интензитет импулса. Због разлике потенцијала између извора и аноде, електрони стичу кинетичку енергију $T = eU$ $\boxed{3\text{п}}$. Како је $T = 200\,\mathrm{keV}$ упоредиво са енергијом мировања електрона $E_0 = m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $\boxed{3\text{п}}$, интензитет импулса и кинетичка енергија су повезани релативистичком формулом $p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}$ $\boxed{5\text{п}}$. Из претходних једначина следи да је моћ разлагања микроскопа $d = \frac{hc}{\sin\theta\sqrt{eU(eU+2m_e c^2)}}$ $\boxed{4\text{п}}$, односно $d = 0{,}25\,\mathrm{nm}$ $\boxed{2\text{п}}$.

2. Стационарна стања електрона су пребројана квантним бројем $n = 1,2,\ldots$ при чему је енергија стања n једнака $E_n = \frac{h^2}{8m_e L^2}n^2$ $\boxed{4\text{п}}$. Ако апсорпција фотона таласне дужине λ доводи до преласка електрона из стационарног стања n у стационарно стање $m > n$ важи $\frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n$ $\boxed{5\text{п}}$, односно $\lambda = \frac{8m_e c L^2}{h(m^2-n^2)}$ $\boxed{1\text{п}}$. Највећа таласна дужина фотона који може да изазове прелаз између нека два стационарна стања електрона се постиже када разлика $m^2 - n^2$ узима најмању вредност. Тада је $m = 2$, $n = 1$, $m^2 - n^2 = 3$ $\boxed{6\text{п}}$, па следи $L = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8m_e c}}$ $\boxed{2\text{п}}$, односно након замене бројних вредности $L = 2{,}9\,\mathrm{nm}$ $\boxed{2\text{п}}$.

3. Обруч у сваком тренутку додирује руку, па се центар масе обруча креће по кругу полупречника $R - r$ око центра руке, видети слику 1. Ако је φ угао за који је центар масе померен из равнотежног положаја, према другом Њутновом закону важи $ma = -mg\sin\varphi$ $\boxed{7\text{п}}$, где је m маса обруча, а a тангенцијално убзање центра масе. У случају малих осцилација важи $\sin\varphi \approx \varphi$ $\boxed{1\text{п}}$. Угаоно убрзање центра масе је $\alpha = \frac{a}{R-r}$ $\boxed{6\text{п}}$, па се из претходних једначина добија $\alpha = -\frac{g}{R-r}\varphi$ $\boxed{2\text{п}}$. Пошто важи $\alpha = -\omega^2\varphi$, следи да је кружна фреквенција малих осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{R-r}}$, одакле је период $T = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$ $\boxed{4\text{п}}$.



Слика 1: уз решење задатка 3.

4. Количина топлоте коју би вода масе m_w отпустила приликом хлађења од почетне температуре t_w до температуре t_0 је $Q_w = m_w c_w(t_w - t_0)$ и износи $Q_w = 16{,}8\,\mathrm{kJ}$, док је количина топлоте коју би вода температуре t_0 и масе m_w отпустила приликом преласка у лед температуре t_0 једнака $Q'_w = m_w\lambda_i$ и износи $Q'_w = 66\mathrm{kJ}$ $\boxed{1\text{п}}$. Количина топлоте коју би лед масе m_i примио приликом загревања од почетне температуре t_i до температуре t_0 је $Q_i = m_i c_i(t_0 - t_i)$ и износи $Q_i = 2{,}1\,\mathrm{kJ}$, док је количина топлоте коју би лед масе m_i и температуре t_0 примио приликом преласка у воду температуре t_0 једнака $Q'_i = m_i\lambda_i$ и износи $Q'_i = 33\,\mathrm{kJ}$ $\boxed{1\text{п}}$. Пошто је $Q_i + Q'_i > Q_w$, у успостављеном стању се сигурно не налази само вода $\boxed{3\text{п}}$. Пошто је $Q_i < Q_w + Q'_w$, у успостављеном стању се сигурно не налази само лед $\boxed{3\text{п}}$. Дакле, успоставља се стање у којем постоје и вода и лед, а успостављена температура је $t = 0°\mathrm{C}$ $\boxed{2\text{п}}$. Због $Q_w > Q_i$, маса Δm леда ће прећи у воду при чему важи $Q_w = Q_i + \Delta m\,\lambda_i$ $\boxed{5\text{п}}$, одакле је $\Delta m = \frac{m_w c_w(t_w-t_0) - m_i c_i(t_0-t_i)}{\lambda_i}$ $\boxed{1\text{п}}$. Маса воде у успостављеном стању је $m'_w = m_w + \frac{m_w c_w(t_w-t_0) - m_i c_i(t_0-t_i)}{\lambda_i}$ $\boxed{1\text{п}}$ и износи $m'_w = 245\,\mathrm{g}$ $\boxed{1\text{п}}$, док је маса леда у успостављеном стању $m'_i = m_i - \frac{m_w c_w(t_w-t_0) - m_i c_i(t_0-t_i)}{\lambda_i}$ $\boxed{1\text{п}}$ и износи $m'_i = 55{,}5\,\mathrm{g}$ $\boxed{1\text{п}}$.

5. У равнотежном положају, сила Земљине теже је уравнотежена електричном силом која делује на наелектрисани опиљак. Излазак опиљка из равнотежног положаја након почетка озрачивања се дешава услед фотоелектричног ефекта, при чему један упадни фотон изазива губитак једног електрона $\boxed{3\text{п}}$. Приметимо да је енергија фотона $\frac{hc}{\lambda} = 10\,\mathrm{keV}$ значајно већа од излазног рада који за све метале износи неколико eV $\boxed{1\text{п}}$. Ако извор емитује n фотона у јединици времена равномерно у свим правцима, до опиљка стижу само они фотони који бивају емитовани у просторни угао $\Omega_{\mathrm{Bi}} = \frac{\pi r^2}{d^2}$ $\boxed{3\text{п}}$. Стога је број фотона који у јединици времена падају на опиљак једнак $n_{\mathrm{Bi}} = n\,\frac{\Omega_{\mathrm{Bi}}}{4\pi}$ $\boxed{3\text{п}}$. Средњи број фотона који за време Δt стигну до опиљка је $\Delta N = n_{\mathrm{Bi}}\Delta t$ $\boxed{3\text{п}}$. Према услову задатка, након времена Δt апсорбује се у средњем један фотон, тако да је $\Delta N = 1$ $\boxed{2\text{п}}$. Снага извора је $P = n \cdot \frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{1\text{п}}$. Из претходних једначина онда следи $P = \frac{4d^2}{r^2\Delta t}\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{2\text{п}}$, односно након замене бројних вредности $P = 1{,}6\cdot 10^{-12}\,\mathrm{W}$ $\boxed{2\text{п}}$.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

1. Таласна дужина електрона је $\lambda = \frac{h}{p}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, где је p интензитет импулса. Због разлике потенцијала између извора и аноде, електрони стичу кинетичку енергију $T = eU$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Како је $T = 200\,\mathrm{keV}$ упоредиво са енергијом мировања електрона $E_0 = m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, интензитет импулса и кинетичка енергија су повезани релативистичком формулом $p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}$ $\boxed{\textbf{5п}}$. Из претходних једначина следи да је моћ разлагања микроскопа $d = \frac{hc}{\sin\theta\sqrt{eU(eU+2m_ec^2)}}$ $\boxed{\textbf{4п}}$, односно $d = 0{,}25\,\mathrm{nm}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

2. У равнотежном положају, сила Земљине теже је уравнотежена електричном силом која делује на наелектрисани опиљак. Излазак опиљка из равнотежног положаја након почетка озрачивања се дешава услед фотоелектричног ефекта, при чему један упадни фотон изазива губитак једног електрона $\boxed{\textbf{3п}}$. Приметимо да је енергија фотона $\frac{hc}{\lambda} = 10\,\mathrm{keV}$ значајно већа од излазног рада који за све метале износи неколико eV $\boxed{\textbf{1п}}$. Ако извор емитује n фотона у јединици времена равномерно у свим правцима, до опиљка стижу само они фотони који бивају емитовани у просторни угао $\Omega_{\mathrm{Bi}} = \frac{\pi r^2}{d^2}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Стога је број фотона који у јединици времена падају на опиљак једнак $n_{\mathrm{Bi}} = n\,\frac{\Omega_{\mathrm{Bi}}}{4\pi}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Средњи број фотона који за време Δt стигну до опиљка је $\Delta N = n_{\mathrm{Bi}}\Delta t$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Према услову задатка, након времена Δt апсорбује се у средњем један фотон, тако да је $\Delta N = 1$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Снага извора је $P = n\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Из претходних једначина онда следи $P = \frac{4d^2}{r^2\Delta t}\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, односно након замене бројних вредности $P = 1{,}6\cdot 10^{-12}\,\mathrm{W}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

3. (а) Из граничних услова на крајевима јаме $\psi(0) = 0$ и $\psi(L) = 0$ $\boxed{\textbf{1п}}$, користећи $A \neq 0$, добија се систем једначина по b_1,b_2: $b_1 b_2 = 0$, $(b_1+1)(b_2-1) = 0$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Систем има два решења, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $b_1 = -1$, $b_2 = 0$ $\boxed{\textbf{1п}}$, при чему оба решења дају таласну функцију истог облика $\psi(x) = A\,\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-2\frac{x}{L}\right)$. Константа A се одређује из услова нормираности $\int_0^L dx\,\rho(x) = 1$, где је густина вероватноће $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Преуређивањем услова нормираности следи

$$A^2\int_0^L dx\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 13\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 12\left(\frac{x}{L}\right)^5 + 4\left(\frac{x}{L}\right)^6\right) = 1\ \boxed{\textbf{1п}},$$

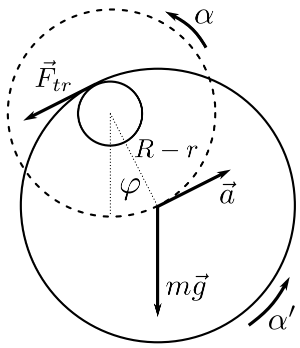
па се након интеграције добија $A = \sqrt{\frac{210}{L}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.
(б) Електрон се са највећом вероватноћом налази у околини тачака у којима $\rho(x)$ достиже максимум. Из услова $\rho'(x) = 0$ се добија једначина

$$2A^2\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-2\frac{x}{L}\right)\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\,\frac{x}{L} + 1\right) = 0\ \boxed{\textbf{2п}}$$

чија су решења $x_1 = 0$, $x_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)L$, $x_3 = \frac{1}{2}L$, $x_4 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)L$ и $x_5 = L$ $\boxed{\textbf{2п}}$. На основу знака првог извода закључујемо да $\rho(x)$ расте за $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$ и опада за $x_2 < x < x_3$ и $x_4 < x < x_5$ $\boxed{\textbf{2п}}$, па, узимајући у обзир да је $\rho(x_2) = \rho(x_4)$, следи да се електрон највероватније налази у околини тачака $x_2 \approx 0{,}211\,L$ и $x_4 \approx 0{,}789\,L$ $\boxed{\textbf{1п}}$.
(в) Пошто важи $\rho(x) = \rho(L-x)$, густина вероватноће је симетрична у односу на центар јаме (тачку $x = \frac{L}{2}$) $\boxed{\textbf{3п}}$, па је вероватноћа налажења електрона у области $0 \le x \le \frac{L}{2}$ једнака $1/2$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

4. Обруч у сваком тренутку додирује руку, па се центар масе обруча креће по кругу полупречника $R-r$ око центра руке, одакле је $a = (R-r)\,\alpha$ $\boxed{\textbf{2п}}$, где је a тангенцијално, а α угаоно убрзање центра масе, видети слику 1. Пошто нема проклизавања, важи $a = \alpha' R$ $\boxed{\textbf{3п}}$, где је α' угаоно убрзање ротације обруча. Ако је φ угао за који је центар масе померен из равнотежног положаја, према другом Њутновом закону важи $ma = -mg\sin\varphi - F_{tr}$ $\boxed{\textbf{4п}}$, где је m маса обруча, а F_{tr} сила трења између руке и обруча. Једначина ротације обруча је $I\alpha' = RF_{tr}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, где је $I = mR^2$ $\boxed{\textbf{1п}}$ момент инерције обруча. У случају малих осцилација важи $\sin\varphi \approx \varphi$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Из претходних једначина се добија $\alpha = -\frac{g}{2(R-r)}\varphi$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Пошто важи $\alpha = -\omega^2\varphi$, следи да је кружна фреквенција малих осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$, одакле је период $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Слика 1: уз решење задатка 4.

5. Решавање задатка је погодно одвојено спровести у неколико различитих случајева.

   (а) Ако је $m_w c_w(t_w - t_0) \geq m_i c_i(t_0 - t_i) + m_i\lambda_i$, односно $\eta \geq \frac{c_i(t_0-t_i)+\lambda_i}{c_w(t_w-t_0)}$, сав лед ће прећи у воду $\boxed{\textbf{2п}}$, а коначна температура смеше t се добија из $m_w c_w(t_w - t) = m_i c_i(t_0 - t_i) + m_i\lambda_i + m_i c_w(t - t_0)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ и износи $t = t_0 + \frac{\eta c_w(t_w-t_0)-c_i(t_0-t_i)-\lambda_i}{(1+\eta)c_w}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Релативне промене маса воде и леда су $\frac{\Delta m_w}{m_w} = \frac{1}{\eta}$, док је $\frac{\Delta m_i}{m_i} = -1$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

   (б) Ако је $m_w c_w(t_w - t_0) + m_w\lambda_i \leq m_i c_i(t_0 - t_i)$, односно $\eta \leq \frac{c_i(t_0-t_i)}{c_w(t_w-t_0)+\lambda_i}$, сва вода ће прећи у лед $\boxed{\textbf{2п}}$, а коначна температура смеше t се добија из $m_w c_w(t_w - t_0) + m_w\lambda_i + m_w c_i(t_0 - t) = m_i c_i(t - t_i)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ и износи $t = t_0 - \frac{c_i(t_0-t_i)-\eta(c_w(t_w-t_0)+\lambda_i)}{(1+\eta)c_i}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Релативне промене маса воде и леда су $\frac{\Delta m_w}{m_w} = -1$, док је $\frac{\Delta m_i}{m_i} = \eta$. $\boxed{\textbf{1п}}$

   (в) Ако је $\frac{c_i(t_0-t_i)}{c_w(t_w-t_0)+\lambda_i} < \eta < \frac{c_i(t_0-t_i)+\lambda_i}{c_w(t_w-t_0)}$, смеша се састоји од воде и леда, при чему је један део леда прешао у воду или обрнуто $\boxed{\textbf{1п}}$. Температура смеше је $t = t_0$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Ако важи и $m_w c_w(t_w - t_0) > m_i c_i(t_0 - t_i)$, маса Δm_1 леда ће прећи у воду при чему важи $m_w c_w(t_w - t_0) = m_i c_i(t_0 - t_i) + \Delta m_1\lambda_i$ $\boxed{\textbf{2п}}$, тако да је $\frac{\Delta m_w}{m_w} = \frac{\Delta m_1}{m_w} = \frac{c_w(t_w-t_0)-c_i(t_0-t_i)/\eta}{\lambda_i}$, док је $\frac{\Delta m_i}{m_i} = -\frac{\Delta m_1}{m_i} = \frac{c_i(t_0-t_i)-\eta c_w(t_w-t_0)}{\lambda_i}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Ако, пак, важи и $m_w c_w(t_w - t_0) < m_i c_i(t_0 - t_i)$, маса Δm_1 воде ће прећи у лед, при чему се за релативне промене маса воде и леда добијају изрази истоветни оним у претходном случају $\boxed{\textbf{2п}}$.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд