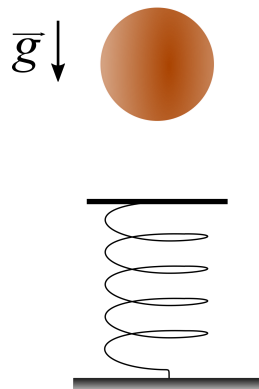




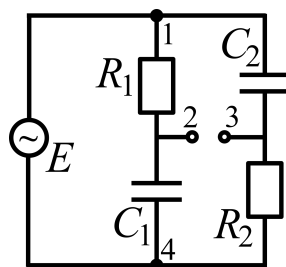
III разред

- Дејан и Јован играју кошарку за два различита кошаркашка клуба. У току утакмице, Дејан шутира тројку са удаљености  $D = 7,25$  m. Након што подигне руке при избачају, лопта је на висини  $h_D = 210$  cm изнад земље. Јован, који се налази  $d = 100$  cm далеко од Дејана, покушава да га изблокира и скаче вертикално увис, тако да су му врхови прстију руке којом покушава да изблокира на висини  $h = 310$  cm. Лопта прелеће непосредно изнад Јованових прстију и касније улеће у кош. Која је највећа висина на којој се налази лопта у току свог лета? Обруч коша се налази на висини  $H = 3,05$  m. (20 поена)
- Ручни сат се налази у магнетном пољу Земље. Колика електромоторна сила се индукује на крајевима секундне, минутне и часовне казаљке, уколико су њихове дужине  $L_s = 3,0$  cm,  $L_m = 2,5$  cm и  $L_h = 1,5$  cm, респективно. Узети да је интензитет магнетне индукције  $B = 5,0 \mu\text{T}$ , а да је његов правац нормалан на раван у којој се казаљке обрћу. Сматрати да су казаљке направљене од метала и да су међусобно изоловане. (20 поена)
- Лопта масе  $M$  пуштена је да пада у тренутку  $t = 0$  са висине  $H$  без почетне брзине. Испод лопте налази се лака опруга коефицијента еластичности  $k$  са хоризонталним тасом занемарљиве масе (слика). Опруга у недеформисаном стању има дужину  $l_0$  и све време остаје вертикална.
  - Одредити тренутак удара лопте о тас  $t_1$  и висину равнотежног положаја лопте  $h_r$ .
  - Наћи угаону учестаност  $\omega$  и амплитуду  $A$  успостављених осцилација.
  - Скицирати график висине лопте у зависности од времена  $h(t)$ ,  $t \geq 0$  и на њему означити величине одређене у претходним деловима.
  - Колика је енергија осцилација? (20 поена)



Слика уз задатак 3.

- У колу наизменичне струје приказаном на слици, позната је ефективна вредност напона извора  $E$ . Ако је фазна разлика струја грана 1-2-4 и 1-3-4 једнака  $\alpha$ , одредити ефективну вредност излазног напона  $U_{23}$ . Помоћ:  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ . (20 поена)



Слика уз задатак 4.

- На глатком столу налазе се два стална магнета различитих маса. Магнети су постављени тако да је северни пол једног окренут ка јужном полу другог и оба магнета се одржавају у стању мировања. Након што се пусти први магнет, до судара дође за  $T_1 = 0,6$  s. Ако бисмо из почетног положаја уместо првог пустили други магнет, до судара би дошло за  $T_2 = 0,8$  s. Ако из истог почетног положаја истовремено из мировања пустимо оба магнета, за колико времена дође до судара? Сматрати да потенцијална енергија магнетне интеракције зависи само од растојања између два магнета. (20 поена)

Задатке припремили: Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, Француска  
Стефан Шушињар, Politecnico di Milano, Италија

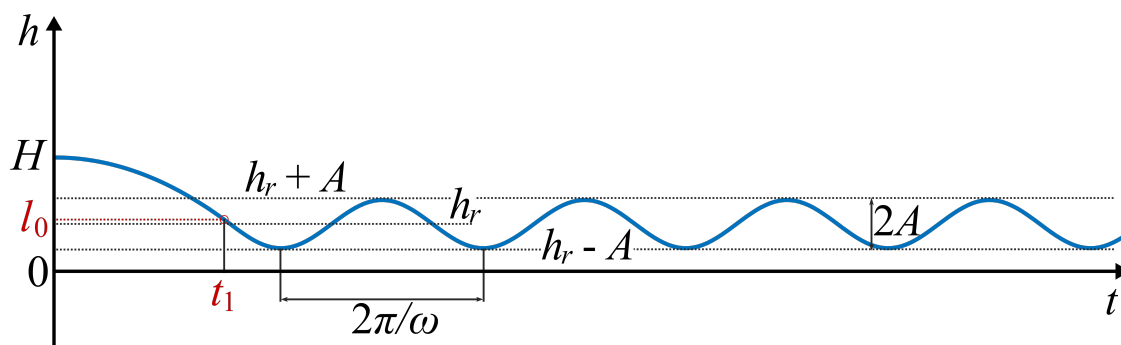
Рецензент: др Владан Павловић, Приородно-математички факултет, Ниш

Председник Комисије за такмичења средњих школа: др Божидар Николић, Физички факултет, Београд



III разред

1. Путања лопте је парабала, односно, дата је једначином  $y = ax^2 + bx + c$  [3п]. Из услова задатка су позната три положаја лопте. Уколико се координатни почетак постави на место на коме се Дејан налази при шуту, координате ова три положаја су:  $(x_1, y_1) = (0, h_D)$ ,  $(x_2, y_2) = (d, h_J)$  и  $(x_3, y_3) = (D, H)$  [3п]. Потребно је дакле, најпре одредити коефицијенте  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Из првог положаја лопте се добија  $c = h_D$  [1п]. Из преостала два положаја имамо две једначине са две непознате  $h_J = ad^2 + bd + h_D$  [1п] и  $H = aD^2 + bD + h_D$  [1п]. Њиховим решавањем се добија  $a = \frac{(h_J - h_D)D - (H - h_D)d}{dD(d-D)} = -0,139 \text{ m}^{-1}$  [3п] и  $b = \frac{(H - h_D)d^2 - (h_J - h_D)D^2}{dD(d-D)} = 113,9$  [3п]. Квадратна функција има само један екстремум, и то за вредност  $x_{max} = -\frac{b}{2a}$  [1п], када је  $y_{max} = c - \frac{b^2}{4a}$  [1п]. Заменом израчунатих константи  $a$ ,  $b$  и  $c$  се коначно добија да је максимална висина коју достигне лопта једнака  $y_{max} = 4,43 \text{ m}$  [3п].
2. Индукована електромоторна сила у казаљкама се може наћи помоћу једначине  $\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t}$  [2п]. Промена флукса је једнака  $\Delta\Phi_i = B\Delta S_i$  [2п], док је пребрисана површина  $\Delta S_i = L_i^2\pi \frac{\Delta\phi_i}{2\pi}$  [2п]. Како је угао који пребрише казаљка  $\Delta\phi_i = \omega_i\Delta t$  [2п], следи да је  $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2\omega_i}{2}$  [2п]. Угаоне брзине казаљки се израчунавају помоћу периода казаљки  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$  [1п], где су периоди  $T_s = 60 \text{ s}$ ,  $T_m = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$  и  $T_h = 12 \text{ h} = 43200 \text{ s}$  [3п] па је коначан израз за индуковане електромоторне силе, односно за напоне  $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2\pi}{T_i}$  [3п]. Заменом бројних вредности се добија  $\varepsilon_s = 235,6 \text{ pV}$  [1п],  $\varepsilon_m = 2,73 \text{ pV}$  [1п] и  $\varepsilon_h = 0,08 \text{ pV}$  [1п].
3. Након удара о тас, у тренутку  $t_1 = \sqrt{\frac{2(H-l_0)}{g}}$  [1п], лопта наставља да гура тас наниже непромењеном почетном брзином и креће се по хармонијском закону  $Ma = Mg - kx$  [2п], где је  $x$  померај таса у односу на почетни положај, усмерен вертикално наниже. Равнотежни положај лопте се добија за  $x = Mg/k$ , односно, у односу на површину земље:  $h_r = l_0 - Mg/k$  [2п]. Угаона учестаност осцилација је  $\omega = \sqrt{k/M}$  [2п]. Ако са  $h$  означимо висину лопте у положајима у којима је њена брзина једнака нули, онда на основу закона одржања енергије можемо писати:  $Mg(H - h) = \frac{1}{2}k(l_0 - h)^2$  [2п]. Решења ове квадратне једначине одговарају горњем и доњем амплитудном положају лопте:  $h_{1,2} = l_0 - \frac{Mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + 2\frac{Mg}{k}(H - l_0)}$  [2п], одакле се може изразити амплитуда осциловања као  $2A = |h_1 - h_2|$ , односно  $A = \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + 2\frac{Mg}{k}(H - l_0)}$  [2п]. График је приказан на слици (параболична зависност од тренутка 0 до  $t_1$  [1п], тачно означене висине у тренутку  $t = 0$  и  $t = t_1$  [0,5п] + [0,5п], косинусна зависност од тренутка  $t_1$  надаље са тачно означеним периодом [1п], тачно означени равнотежни положај [1п] и тачно означена амплитуда [1п]). Енергија осциловања је  $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{(Mg)^2}{2k} + Mg(H - l_0)$  [2п].



Слика уз задатак 3.

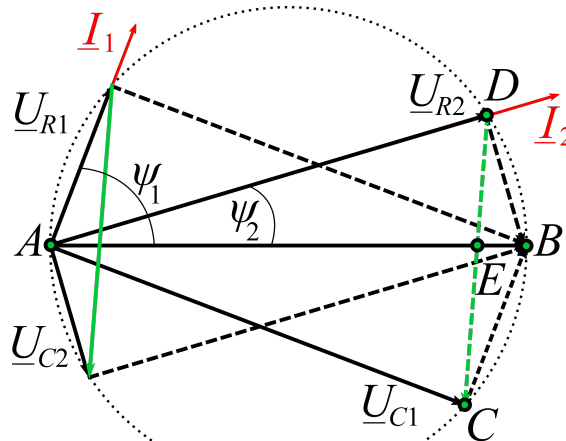
4. Нека су  $\psi_1$  и  $\psi_2$  фазни помераји струја које теку кроз отпорник  $R_1$  и кондензатор  $C_1$ , односно отпорник  $R_2$  и кондензатор  $C_2$ , у односу на напон извора. По услову задатка је  $\psi_1 - \psi_2 = \alpha$ . Напони паралелних грана су једнаки, па су једнаки и њихови фазори и једнаки су фазору напона извора  $E$  [1п]. Фазор струје  $I_1$  у фази је са фазором напона на отпорнику  $U_{R_1}$  [2п], док предњачи у односу на фазор напона на кондензатору  $U_{C_1}$  за  $\pi/2$  [2п]. Слично је и за фазор струје  $I_2$ . На основу тога можемо нацртати фазорски дијаграм као на слици (за исправно нацртани фазорски дијаграм са означеним угловима  $\psi_1$  и  $\psi_2$  [3п]). Тачке  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  леже на кругу над пречником  $AB$  [2п].



Први начин: Ако са  $E$  означимо пресек тетива  $AB$  и  $CD$  онда на основу тригонометрије важе следеће једнакости:  $|CB| = |AB| \cos \psi_1$ ,  $|CE| = |CB| \frac{\sin \psi_1}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}$ ,  $|AD| = |AB| \cos \psi_2$ ,  $|ED| = |AD| \frac{\sin \psi_2}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}$ .  $|CD| = |CE| + |ED| = |AB| \frac{\sin \psi_1 \cos \psi_1 + \sin \psi_2 \cos \psi_2}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} = |AB| \frac{\frac{1}{2} \sin(2\psi_1) + \frac{1}{2} \sin(2\psi_2)}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} = |AB| \frac{\sin(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 - \psi_2)}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} = E \cos \alpha$  [5п]. Ефективна вредност напона  $U_{23}$  једнака је дужини фазора  $\underline{U}_{23} = \underline{U}_{C_2} - \underline{U}_{R_1}$  [2п], што одговара дужини  $|CD|$ , па је коначно  $U_{23} = E \cos \alpha$  [3п].

Други начин: Како је четвороугао  $ABCD$  тетиван, то можемо применити Птолемејеву теорему која нам даје однос страница и дијагоналу  $U_{C_1} \cdot U_{C_2} + U_{R_1} \cdot U_{R_2} = E \cdot U_{23}$  [3п], одакле је  $I_1 I_2 (X_{C_1} X_{C_2} + R_1 R_2) = E U_{23}$ , где је  $X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1}$  и  $X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2}$ . За струје грана важи  $I_1 = \frac{E}{\sqrt{R_1^2 + X_{C_1}^2}}$  [1п] и  $I_2 = \frac{E}{\sqrt{R_2^2 + X_{C_2}^2}}$  [1п]. Сада је  $\frac{E^2}{\sqrt{(R_1^2 + X_{C_1}^2)(R_2^2 + X_{C_2}^2)}} (R_1 R_2 + X_{C_1} X_{C_2}) = E U_{23}$ . Имајући у виду релације  $\frac{X_{C_1}}{R_1} = \operatorname{tg} \psi_1$  и  $\frac{X_{C_2}}{R_2} = \operatorname{tg} \psi_2$ , након сређивања добија се  $U_{23} = \frac{E(1 + \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2)}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1)(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_2)}} [2п] \Rightarrow U_{23} = \frac{E(1 + \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2}}}$ . Коначно је  $U_{23} = E(\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2) = E \cos(\psi_1 - \psi_2) = E \cos \alpha$  [3п].

**Напомена:** Не давати бодове за елементе и једног и другог начина (комбиновано), већ или једног или другог (искључиво), али тако да је изабрани начин повољнији за такмичара.



Слика уз задатак 4.

5. Нека је  $d$  чеоно растојање магнета у почетном тренутку, а  $x$  тренутно растојање у неком посматраном тренутку. Ако са  $W(x)$  означимо потенцијалну енергију магнетне интеракције, за први случај важи:  $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + W(x) = W(d)$  [2п]. Без умањења општости можемо усвојити нулти ниво потенцијалне енергије  $W(d) = 0$ . Пошто је магнетна сила између ова два магнета привлачна, потенцијална енергија интеракције је негативна за  $x < d$ . Како је  $v_1 = \sqrt{\frac{-2W(x)}{m_1}}$ , то је  $\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}} \sqrt{m_1}$  [2п] време потребно да први магнет пређе инфинитезимално мало растојање  $\Delta x$ . Потпуно аналогним резонувањем, за други случај можемо писати  $\Delta t_2 = \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}} \sqrt{m_2}$  [2п]. У случају да се оба магнета пунте из почетног положаја из мировања, њихов центар масе се неће померити, с обзиром на то да нема страних сила у хоризонталном правцу [1п]. Одатле следи  $m_1 v_1 = m_2 v_2$  [2п]. Релативна брзина једног магнета у односу на други је  $v_r = v_1 + v_2$  [1п], одакле је  $\Delta t_3 = \frac{\Delta x}{v_r} = \frac{\Delta x}{v_1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\Delta x}{v_2} \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ . На основу закона одржања енергије је  $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + W(x) = 0$  [2п], одакле је  $v_1^2 \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) = -2W(x)$ . Сређивањем се добија  $\Delta t_3 = \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}} \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}$  [2п]. На основу једначина за  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  и  $\Delta t_3$  сабирањем по свим вредностима  $x$  од  $x = d$  до  $x = 0$ , добијамо  $T_1 = C \cdot \sqrt{m_1}$  [1п],  $T_2 = C \cdot \sqrt{m_2}$  [1п],  $T_3 = C \cdot \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}$  [1п], где је  $C$  константа која се добија из суме  $\sum_{x=d}^{x=0} \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}} = C$ . Очигледно важи  $\frac{1}{T_3^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}$  [2п], одакле се добија  $T_3 = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}} = 0,48 \text{ s}$  [1п].

Задатке припремили: Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, Француска

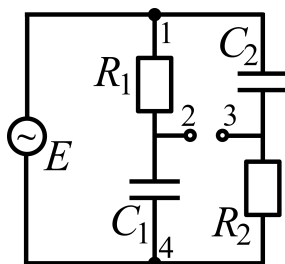
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија

Рецензент: др Владан Павловић, Природно-математички факултет, Ниш

Председник Комисије за такмичења средњих школа: др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

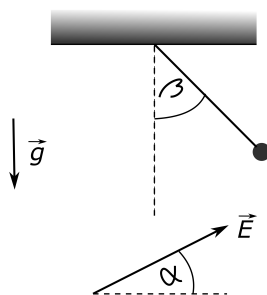


1. Маја се пење уз покретне степенице под углом од  $\theta = 30^\circ$  и дужине  $L = 10$  m. Ако је линеарна брзина степеница  $v_S = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , а она се у односу на њих креће брзином  $v_M = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , одредити колики је однос радова које је извршила она и мотор који покреће степенице. Сматрати да нема трења у механизму степеница. (20 поена)
2. Ручни сат се налази у магнетном пољу Земље. Колика електромоторна сила се индукује на крајевима секундне, минутне и часовне казаљке, уколико су њихове дужине  $L_s = 3,0$  cm,  $L_m = 2,5$  cm и  $L_h = 1,5$  cm, респективно. Узети да је интензитет магнетне индукције  $B = 5,0 \mu\text{T}$ , а да је његов правац нормалан на раван у којој се казаљке обрћу. Сматрати да су казаљке направљене од метала и да су међусобно изоловане. (20 поена)
3. Клип облика цилиндра, чија је површина основе  $S$  и маса  $m$ , налази се у хоризонтално постављеној цеви затвореној са обе стране. У равнотежном положају, клип дели цев на два дела једнаких запремина  $V_0$ , у којима се налази исти гас на температури  $T_0$  и притиску  $p_0$ . Ако се применом спољашње силе клип измести за мало растојање из равнотежног положаја, а затим се систем препусти сам себи, клип ће почети да осцилује. Сматрајући да су гасни процеси адијабатски, наћи период малих осцилација у зависности од адијабатске константе  $\gamma$ . Сматрати да нема протока енергије кроз зидове цилиндра и кроз клип. Занемарити силу трења која делује на клип. Помоћ:  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ , за  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $|x| \ll 1$ . (20 поена)
4. У колу наизменичне струје приказаном на слици, позната је ефективна вредност напона извора  $E$ . Ако је фазна разлика струја грана 1-2-4 и 1-3-4 једнака  $\alpha$ , одредити ефективну вредност излазног напона  $U_{23}$ . Помоћ:  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ . (20 поена)



Слика уз задатак 4.

5. Куглица масе  $m = 10$  g и наелектрисања  $q = 10^{-6}$  C, обешена је на изоловану нит у хомогеном електричном пољу јачине  $E = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  при чему вектор електричног поља заклапа угао  $\alpha = 30^\circ$  у односу на хоризонталу (слика). Куглицу отклонимо удесно тако да нит заклапа угао  $\beta = 45^\circ$  са вертикалом, и пустимо. Наћи затезање нити у тренутку проласка куглице кроз вертикални положај. Убрзање Земљине теже је  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . (20 поена)



Слика уз задатак 5.



III разред

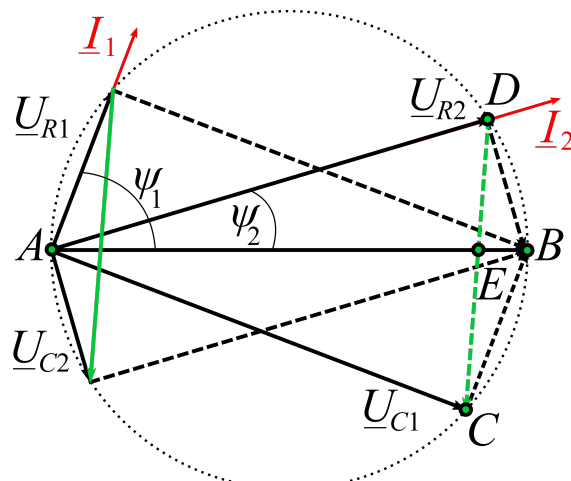
1. Уколико са  $t$  означимо време које је потребно да се Маја попне до врха степеница, радови који изврше Маја и степенице ће бити једнаки  $A_M = mgv_{Mt} \sin \theta$  [7п] и  $A_S = mgv_{St} \sin \theta$  [7п]. Дељењем ове две једначине се добија  $\frac{A_M}{A_S} = \frac{v_M}{v_S} = 0,6$  [4п+2п].
2. Индукована електромоторна сила у казалькама се може наћи помоћу једначине  $\varepsilon_i = \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t}$  [2п]. Промена флукса је једнака  $\Delta \Phi_i = B \Delta S_i$  [2п], док је пребрисана површина  $\Delta S_i = L_i^2 \pi \frac{\Delta \phi_i}{2\pi}$  [2п]. Како је угао који пребрише казалька  $\Delta \phi_i = \omega_i \Delta t$  [2п], следи да је  $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2 \omega_i}{2}$  [2п]. Угаоне брзине казальки се израчунавају помоћу периода казальки  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$  [1п], где су периоди  $T_s = 60$  s,  $T_m = 60$  min = 3600 s и  $T_h = 12$  h = 43200 s [3п] па је коначан израз за индуковане електромоторне силе, односно за напоне  $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2 \pi}{T_i}$  [3п]. Заменом бројних вредности се добија  $\varepsilon_s = 235,6$  pV [1п],  $\varepsilon_m = 2,73$  pV [1п] и  $\varepsilon_h = 0,08$  pV [1п].
3. При адијабатском процесу важи закон  $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$  [3п]. Стога је  $p(V) = p_0V_0^\gamma V^{-\gamma}$  [2п]. При промени запремине за  $\delta V$  важи  $p(V_0 + \delta V) = p_0V_0^\gamma (V_0 + \delta V)^{-\gamma} = p_0V_0^\gamma V_0^{-\gamma} (1 + \frac{\delta V}{V_0})^{-\gamma}$  [2п]. Применом  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  добијамо  $p(V) \approx p_0V_0^\gamma V_0^{-\gamma} (1 - \gamma \frac{\delta V}{V_0}) = p_0(1 - \gamma \frac{\delta V}{V_0})$  [3п]. Сила која делује на клип једнака је  $F = (p_L - p_D)S$  [2п], те ако се он помери у десно за  $\delta x = \frac{\delta V}{S}$ , сила која ће на њега деловати је  $F = -S2p_0\gamma \frac{\delta V}{V_0} = -S^22p_0\gamma \frac{\delta x}{V_0}$  [3п]. Из претходног се може прочитати да је реституциона константа једнака  $k = \frac{S^22p_0\gamma}{V_0}$  [2п], те је период малих осцилација једнак  $T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi S \sqrt{\frac{2p_0\gamma}{V_0m}}$  [3п].
4. Нека су  $\psi_1$  и  $\psi_2$  фазни помераји струја које теку кроз отпорник  $R_1$  и кондензатор  $C_1$ , односно отпорник  $R_2$  и кондензатор  $C_2$ , у односу на напон извора. По услову задатка је  $\psi_1 - \psi_2 = \alpha$ . Напони паралелних грана су једнаки, па су једнаки и њихови фазори и једнаки су фазору напона извора  $E$  [1п]. Фазор струје  $I_1$  у фази је са фазором напона на отпорнику  $U_{R_1}$  [2п], док предњачи у односу на фазор напона на кондензатору  $U_{C_1}$  за  $\pi/2$  [2п]. Слично је и за фазор струје  $I_2$ . На основу тога можемо нацртати фазорски дијаграм као на слици (за исправно нацртани фазорски дијаграм са означеним угловима  $\psi_1$  и  $\psi_2$  [3п]). Тачке  $A, B, C$  и  $D$  леже на кругу над пречником  $AB$  [2п].  
Први начин: Ако са  $E$  означимо пресек тетива  $AB$  и  $CD$  онда на основу тригонометрије важе следеће једнакости:  $|CB| = |AB| \cos \psi_1$ ,  $|CE| = |CB| \frac{\sin \psi_1}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}$ ,  $|AD| = |AB| \cos \psi_2$ ,  $|ED| = |AD| \frac{\sin \psi_2}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}$ .  $|CD| = |CE| + |ED| = |AB| \frac{\sin \psi_1 \cos \psi_1 + \sin \psi_2 \cos \psi_2}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} = |AB| \frac{\frac{1}{2} \sin(2\psi_1) + \frac{1}{2} \sin(2\psi_2)}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} = |AB| \frac{\sin(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 - \psi_2)}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} = E \cos \alpha$  [5п]. Ефективна вредност напона  $U_{23}$  једнака је дужини фазора  $U_{23} = U_{C_2} - U_{R_1}$  [2п], што одговара дужини  $|CD|$ , па је коначно  $U_{23} = E \cos \alpha$  [3п].  
Други начин: Како је четвороугао  $ABCD$  тетиван, то можемо применити Птоломејеву теорему која нам даје однос страница и дијагонала  $U_{C_1} \cdot U_{C_2} + U_{R_1} \cdot U_{R_2} = E \cdot U_{23}$  [3п], одакле је  $I_1 I_2 (X_{C_1} X_{C_2} + R_1 R_2) = E U_{23}$ , где је  $X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1}$  и  $X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2}$ . За струје грана важи  $I_1 = \frac{E}{\sqrt{R_1^2 + X_{C_1}^2}}$  [1п] и  $I_2 = \frac{E}{\sqrt{R_2^2 + X_{C_2}^2}}$  [1п]. Сада је  $\frac{E^2}{\sqrt{(R_1^2 + X_{C_1}^2)(R_2^2 + X_{C_2}^2)}} (R_1 R_2 + X_{C_1} X_{C_2}) = E U_{23}$ . Имајући у виду релације  $\frac{X_{C_1}}{R_1} = \text{tg} \psi_1$  и  $\frac{X_{C_2}}{R_2} = \text{tg} \psi_2$ , након сређивања добија се  $U_{23} = \frac{E(1 + \text{tg} \psi_1 \text{tg} \psi_2)}{\sqrt{(1 + \text{tg}^2 \psi_1)(1 + \text{tg}^2 \psi_2)}}$  [2п]  $\Rightarrow U_{23} = \frac{E(1 + \text{tg} \psi_1 \text{tg} \psi_2)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2}}}$ . Коначно је  $U_{23} = E(\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2) = E \cos(\psi_1 - \psi_2) = E \cos \alpha$  [3п].  
Напомена: Не давати бодове за елементе и једног и другог начина (комбиновано), већ или једног или другог (искључиво), али тако да је изабрани начин повољнији за такмичара.
5. Сила затезања нити, када је нит у вертикалном положају, је једнака  $T = \frac{mv^2}{l} + mg - qE_y$  [4п]. Брзина куглице, када је нит у вертикалном положају се са друге стране може наћи из закона одржања енергије  $mg(l - l \cos \beta) = \frac{mv^2}{2} + qE_x l \sin \beta + qE_y(l - l \cos \beta)$  [4п], где су хоризонтална и вертикална компонента електричног поља  $E_x = E \cos \alpha$  [1п] и  $E_y = E \sin \alpha$  [1п]. Из ове формуле следи да је  $\frac{mv^2}{l} = 2mg(1 - \cos \beta) - 2qE(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha) = 2mg(1 - \cos \beta) - 2qE(\sin(\beta - \alpha) + \sin \alpha)$  [5п], па се заменом у израз за силу затезања добија  $T = mg(3 - 2 \cos \beta) - qE(2 \sin(\beta - \alpha) + 3 \sin \alpha) = 54,7$  mN [3п+2п].

Задатке припремили: Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, Француска

Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија

Рецензент: др Владан Павловић, Приородно-математички факултет, Ниш

Председник Комисије за такмичења средњих школа: др Божидар Николић, Физички факултет, Београд



Слика уз задатак 4.