ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2018/2019. ГОДИНЕ

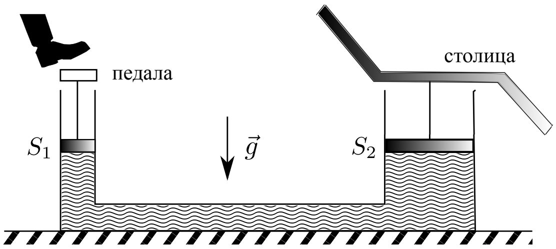
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА*

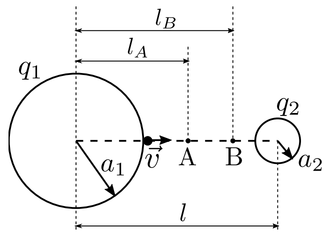
IV разред

ОКРУЖНИ НИВО
3. март 2019.

1. На слици 1 је приказана упрошћена шема система за подизање столице који се користи у зубарским ординацијама. Систем се састоји од педале преко које се може деловати на клип 1 површине $S_1 = 124\,\mathrm{cm}^2$, нестишљиве течности којом је испуњена унутрашњост система и клипа 2 површине $S_2 = 0{,}103\,\mathrm{m}^2$ који је повезан са столицом и налази се у истој хоризонталној равни као клип 1. Маса столице је $m_S = 10{,}14\,\mathrm{kg}$, а масе клипова и педале су занемарљиве. Одредити колика је максимална маса пацијента (који седи на столици) коју зубар може да подигне кад на клип 1 делује силом од $F = 120\,\mathrm{N}$. **(20 поена)**



Слика 1: уз задатак 1 - систем за подизање зубарске столице.



Слика 2: уз задатак 2 - наелектрисане сфере и честица.

2. Честица масе m и наелектрисања $q = -q_0$ се креће по правој која спаја центре две наелектрисане непроводне сферне љуске које су учвршћене тако да не могу да се крећу, као што је приказано на слици 2. Полупречник прве сфере је $a_1 = 3a_0$, полупречник друге сфере је $a_2 = a_0$, наелектрисање прве сфере је $q_1 = 4q_0$ и наелектрисање друге сфере је $q_2 = q_0$. Наелектрисања сфера су равномерено распоређена по њиховој површини. Растојање између центара сфера је $l = 9a_0$. У почетном тренутку честица се налазила на површини прве сфере и интензитет њене брзине је био v, при чему је та брзина била усмерена ка другој сфери, видети слику 2. Тачке A и B се налазе на правој по којој се креће честица, при чему је тачка A на растојању $l_A = 5a_0$, а тачка B на растојању $l_B = 7a_0$ од центра прве сфере. Занемарити дејства свих гравитационих сила. Одредити минималну вредност v при којој ће честица стићи до (а) тачке A; (б) тачке B. **(20 поена)**

3. Честица масе m се налази у једнодимензионој потенцијалној јами за коју је потенцијална енергија облика $U(x) = ax^2$, где је $a > 0$ позната константа. Одредити: (а) разлику енергија другог побуђеног и основног стања; (б) средњу вредност координате честице у четвртом побуђеном стању. **(20 поена)**

4. За убрзавање честица до релативистичких брзина обично се користе велика акцелераторска постројења. С друге стране, ово убрзавање се може постићи и у лабораторијским условима коришћењем ултрајаких и ултракратких ласерских импулса који побуђују плазму и стварају електрично поље које убрзава честице. Претпоставити да је временска зависност $x-$компоненте укупног електричног поља које делује на честицу која се убрзава на овај начин дата изразом $E(t) = E_0\left(1 - \frac{|t-\tau_0|}{\tau_0}\right)$ који важи за $0 \le t \le 2\tau_0$, док је ван временског интервала $(0{,}2\tau_0)$ то електрично поље једнако нули. Сматрати и да је електрично поље усмерено дуж $x-$осе и да је $E_0 = 4{,}4 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, а $\tau_0 = 15\,\mathrm{fs}$. До које брзине ће овакав ласерски импулс убрзати протон који је у тренутку $t = 0$ мировао? Показати и да је пут који ће приликом убрзавања прећи протон мањи од $10\,\mu\mathrm{m}$. **(20 поена)**

5. Космичко позадинско микроталасно зрачење испуњава васиону и истим интензитетом до Земље (или неког другог небеског тела) долази равномерно са свих страна. Спектар овог зрачења се поклапа са спектром зрачења апсолутно црног тела температуре $T_k = 2{,}7\,\mathrm{K}$. Колико пута је снага овог зрачења која падне на површину Земље мања од снаге зрачења које емитује Земља? Сматрати да је Земља апсолутно црно тело температуре $T_z = 279\,\mathrm{K}$. **(20 поена)**

Приликом решавања задатака можете користити следеће физичке константе: интензитет убрзања силе Земљине теже $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, редукована Планкова константа $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, маса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, брзина светлости $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, Штефан-Болцманова константа $\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

РЕШЕЊА – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

1. Из услова да је клип 1 лак, налазимо $F + p_{\rm at}S_1 = pS_1$ **6п**, где је p притисак течности непосредно испод клипа 1, а $p_{\rm at}$ је атмосферски притисак. Пошто је клип 2 у истој хоризонталној равни као клип 1, следи да је p истовремено и притисак течности непосредно испод клипа 2 **3п**. Да би се подигла столица, треба да буде испуњен услов $pS_2 > (m + m_S)\, g + p_{\rm at}S_2$ **6п**. Из претходних израза налазимо $m < \frac{FS_2}{S_1 g} - m_S$, па је тражена максимална маса човека $m_{\max} = \frac{FS_2}{S_1 g} - m_S$ **3п**, односно $m_{\max} = 91{,}5\ \rm kg$ **2п**.

2. Пројекција вектора електричног поља на правац који спаја сфере је у тачки X која се налази на растојању x од центра прве сфере једнака $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(l-x)^2}\right)$ **2п**. Одатле налазимо да је $E > 0$ за $x < 6a_0$, односно $E < 0$ за $x > 6a_0$. Одатле следи да је сила која делује на честицу привлачи ка првој сфери за $x < 6a_0$, а да је привлачи ка другој сфери за $x > 6a_0$ **2п**. (а) Да би честица стигла до тачке A потребно је да има довољну кинетичку енергију да савлада силу која је привлачи ка првој сфери **2п**. Из закона одржања енергије је тако $\frac{mv_{\min}^2}{2} + W(3a_0) = W(5a_0)$ **2п**, где је $W(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{l-x}$ потенцијална енергија честице у електричном пољу сфера **3п**. Одатле следи $v_{\min} = \sqrt{\frac{9q_0^2}{40\pi\varepsilon_0 m a_0}}$ **2п**. (б) Да би честица стигла до тачке B довољно је да стигне до тачке у којој је електрична сила привлачи ка другој сфери, а то је тачка која се налази на растојању $x = 6a_0$ од центра прве сфере **3п**. Из закона одржања енергије је тако $\frac{mv_{\min}^2}{2} + W(3a_0) = W(6a_0)$ **2п**, одакле је $v_{\min} = \sqrt{\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 m a_0}}$ **2п**.

3. Дата потенцијална енергија представља потенцијалну енергију линеарног хармонијског осцилатора са константом еластичности $k = 2a$ **5п**. Кружна фреквенца тог осцилатора је $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **2п**, а енергија $n-$тог стања је $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ **2п**. (а) Разлика енергија другог побуђеног и основног стања је онда $\Delta E = E_2 - E_0$ **2п**, одакле је $\Delta E = 2\hbar\sqrt{\frac{2a}{m}}$ **2п**. (б) Потенцијална енергија честице за свако x задовољава услов $U(x) = U(-x)$, одакле следи да је густина вероватноће налажења честице у тачкама x и $-x$ једнака **3п**. Одатле следи да је средња вредност координате честице једнака нули **4п**.

4. Интензитет импулса p који добије протон приликом убрзавања једнак је површини испод графика зависности силе која делује на протон од времена. Одатле налазимо $p = eE_0\tau_0$ **8п**. Интензитет импулса и интензитет брзине v су повезани релацијом $p = \frac{m_p v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ **2п**. Из претходне две релације налазимо $v = c\frac{eE_0\tau_0}{\sqrt{(eE_0\tau_0)^2 + m_p^2c^2}}$ **2п**, односно $v = 2{,}7\cdot 10^8\ \frac{\rm m}{\rm s}$ **2п**. Пошто је брзина протона мања од брзине светлости, пут који ће прећи за време $2\tau_0$ је мањи од $2c\tau_0 = 9{,}0\ \mu{\rm m} < 10\ \mu{\rm m}$ **6п**.

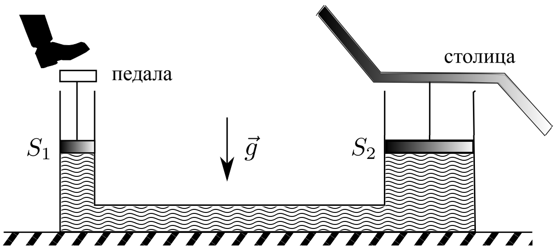
5. Снага космичког позадинског микроталасног зрачења које падне на јединицу површине Земље је $\Phi_k = \sigma T_k^4$ **8п**, а снага зрачења које емитује Земља са јединице површине је $\Phi_z = \sigma T_z^4$ **6п**, где је σ Штефан-Болцманова константа. Из претходних једначина следи да је тражени однос $r = \frac{\Phi_z}{\Phi_k} = \left(\frac{T_z}{T_k}\right)^4$ **3п**, одакле је $r = 1{,}1\cdot 10^8$, односно снага космичког позадинског микроталасног зрачења које падне на Земљу је $1{,}1\cdot 10^8$ пута мања од снаге коју зрачи Земља **3п**.

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2018/2019. ГОДИНЕ

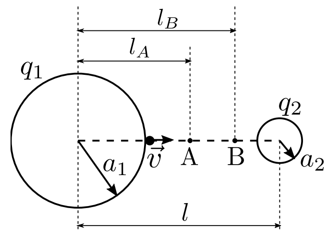
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред **ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА*** **ОКРУЖНИ НИВО**
3. март 2019.

1. На слици 1 је приказана упрошћена шема система за подизање столице који се користи у зубарским ординацијама. Систем се састоји од педале преко које се може деловати на клип 1 површине $S_1 = 124\,\mathrm{cm}^2$, нестишљиве течности којом је испуњена унутрашњост система и клипа 2 површине $S_2 = 0{,}103\,\mathrm{m}^2$ који је повезан са столицом и налази се у истој хоризонталној равни као клип 1. Маса столице је $m_S = 10{,}14\,\mathrm{kg}$, а масе клипова и педале су занемарљиве. Одредити колика је максимална маса пацијента (који седи на столици) коју зубар може да подигне кад на клип 1 делује силом од $F = 120\,\mathrm{N}$. **(20 поена)**



Слика 1: уз задатак 1 - систем за подизање зубарске столице.



Слика 2: уз задатак 2 - наелектрисане сфере и честица.

2. Честица масе m и наелектрисања $q = -q_0$ се креће по правој која спаја центре две наелектрисане непроводне сферне љуске које су учвршћене тако да не могу да се крећу, као што је приказано на слици 2. Полупречник прве сфере је $a_1 = 3a_0$, полупречник друге сфере је $a_2 = a_0$, наелектрисање прве сфере је $q_1 = 4q_0$ и наелектрисање друге сфере је $q_2 = q_0$. Наелектрисања сфера су равномерно распоређена по њиховој површини. Растојање између центара сфера је $l = 9a_0$. У почетном тренутку честица се налазила на површини прве сфере и интензитет њене брзине је био v, при чему је та брзина била усмерена ка другој сфери, видети слику 2. Тачке A и B се налазе на правој по којој се креће честица, при чему је тачка A на растојању $l_A = 5a_0$, а тачка B на растојању $l_B = 7a_0$ од центра прве сфере. Занемарити дејства свих гравитационих сила. Одредити минималну вредност v при којој ће честица стићи до (а) тачке A; (б) тачке B. **(20 поена)**

3. Честица масе m се налази у једнодимензионој потенцијалној јами за коју је потенцијална енергија облика $U(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2$, где су a_0, b_0 и $c_0 > 0$ познате константе. Одредити: (а) разлику енергија другог побуђеног и основног стања; (б) средњу вредност координате честице у четвртом побуђеном стању. **(20 поена)**

4. За убрзавање честица до релативистичких брзина обично се користе велика акцелераторска постројења. С друге стране, ово убрзавање се може постићи и у лабораторијским условима коришћењем ултрајаких и ултракратких ласерских импулса који побуђују плазму и стварају електрично поље које убрзава честице. Претпоставити да је временска зависност $x-$компоненте укупног електричног поља које делује на честицу која се убрзава на овај начин дата изразом $E(t) = E_0\left(1 - \frac{|t-\tau_0|}{\tau_0}\right)$ који важи за $0 \le t \le 2\tau_0$, док је ван временског интервала $(0{,}2\tau_0)$ то електрично поље једнако нули. Сматрати и да је електрично поље усмерено дуж $x-$осе и да је $E_0 = 4{,}4 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, а $\tau_0 = 15\,\mathrm{fs}$. До које брзине ће овакав ласерски импулс убрзати протон који је у тренутку $t = 0$ мировао? Показати и да је пут који ће приликом убрзавања прећи протон мањи од $10\,\mu\mathrm{m}$. **(20 поена)**

5. Космичко позадинско микроталасно зрачење испуњава васиону и истим интензитетом до Земље (или неког другог небеског тела) долази равномерно са свих страна. Спектар овог зрачења се поклапа са спектром зрачења апсолутно црног тела. Запреминска густина енергије овог зрачења је $u = 4{,}005 \cdot 10^{-14}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$. Одредити енергију овог зрачења која падне на јединицу површине Земље у јединици времена. Колико пута је та величина мања од енергије коју у јединици времена емитује Земља са јединице површине? Сматрати да је Земља апсолутно црно тело температуре $T_z = 279{,}0\,\mathrm{K}$. **(20 поена)**

Приликом решавања задатака можете користити следеће физичке константе: интензитет убрзања силе Земљине теже $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, редукована Планкова константа $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, маса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, брзина светлости $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, Штефан-Болцманова константа $\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

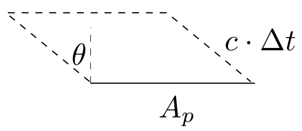
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2018/2019. ГОДИНЕ

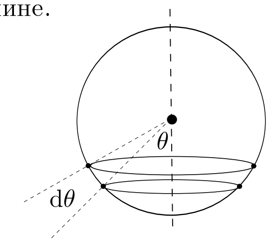
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред **РЕШЕЊА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** **ОКРУЖНИ НИВО 3. март 2019.**

1. Из услова да је клип 1 лак, налазимо $F+p_{\text{at}}S_1=pS_1$ $\boxed{\text{6п}}$, где је p притисак течности непосредно испод клипа 1, а p_{at} је атмосферски притисак. Пошто је клип 2 у истој хоризонталној равни као клип 1, следи да је p истовремено и притисак течности непосредно испод клипа 2 $\boxed{\text{3п}}$. Да би се подигла столица, треба да буде испуњен услов $pS_2>(m+m_S)\,g+p_{\text{at}}S_2$ $\boxed{\text{6п}}$. Из претходних израза налазимо $m<\frac{FS_2}{S_1g}-m_S$, па је тражена максимална маса човека $m_{\max}=\frac{FS_2}{S_1g}-m_S$ $\boxed{\text{3п}}$, односно $m_{\max}=91{,}5\text{ kg}$ $\boxed{\text{2п}}$.
2. Пројекција вектора електричног поља на правац који спаја сфере је у тачки X која се налази на растојању x од центра прве сфере једнака $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x^2}-\frac{q_2}{(l-x)^2}\right)$ $\boxed{\text{2п}}$. Одатле налазимо да је $E>0$ за $x<6a_0$, односно $E<0$ за $x>6a_0$. Одатле следи да је сила која делује на честицу привлачи ка првој сфери за $x<6a_0$, а да је привлачи ка другој сфери за $x>6a_0$ $\boxed{\text{2п}}$. (а) Да би честица стигла до тачке A потребно је да има довољну кинетичку енергију да савлада силу која је привлачи ка првој сфери $\boxed{\text{2п}}$. Из закона одржања енергије је тако $\frac{mv_{\min}^2}{2}+W(3a_0)=W(5a_0)$ $\boxed{\text{2п}}$, где је $W(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{x}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{l-x}$ потенцијална енергија честице у електричном пољу сфера $\boxed{\text{3п}}$. Одатле следи $v_{\min}=\sqrt{\frac{9q_0^2}{40\pi\varepsilon_0ma_0}}$ $\boxed{\text{2п}}$. (б) Да би честица стигла до тачке B довољно је да стигне до тачке у којој је електрична сила привлачи ка другој сфери, а то је тачка која се налази на растојању $x=6a_0$ од центра прве сфере $\boxed{\text{3п}}$. Из закона одржања енергије је тако $\frac{mv_{\min}^2}{2}+W(3a_0)=W(6a_0)$ $\boxed{\text{2п}}$, одакле је $v_{\min}=\sqrt{\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0ma_0}}$ $\boxed{\text{2п}}$.
3. Елементарним трансформацијма се показује да се дата потенцијална енергија може представити у облику $U(x)=\frac{1}{2}(2c_0)\left(x+\frac{b_0}{2c_0}\right)^2+a_0-\frac{b_0^2}{4c_0}$, односно увођењем смена $x'=x+\frac{b_0}{2c_0}$, $k=2c_0$ и $A=a_0-\frac{b_0^2}{4c_0}$ следи $U(x')=\frac{1}{2}kx'^2+A$ $\boxed{\text{4п}}$. Одатле видимо да дата потенцијална енергија представља потенцијалну енергију линеарног хармонијског осцилатора са константом еластичности k уз константан енергијски помак A $\boxed{\text{3п}}$. Кружна фреквенца тог осцилатора је $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\boxed{\text{1п}}$, а енергија $n-$тог стања је $E_n=A+\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{1п}}$. (а) Разлика енергија другог побуђеног и основног стања је онда $\Delta E=E_2-E_0$ $\boxed{\text{1п}}$, одакле је $\Delta E=2\hbar\sqrt{\frac{2c_0}{m}}$ $\boxed{\text{2п}}$. (б) Потенцијална енергија честице задовољава за свако x' услов $U(x')=U(-x')$, одакле следи да је густина вероватноће налажења честице у тачкама x' и $-x'$ једнака $\boxed{\text{4п}}$. Одатле следи да је средња вредност од x' једнака нули, одакле је средња вредност од x једнака $x_{\text{SR}}=-\frac{b_0}{2c_0}$ $\boxed{\text{4п}}$.
4. Интензитет импулса p који добије протон приликом убрзавања једнак је површини испод графика зависности силе која делује на протон од времена. Одатле налазимо $p=eE_0\tau_0$ $\boxed{\text{8п}}$. Интензитет импулса и интензитет брзине v су повезани релацијом $p=\frac{m_pv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\boxed{\text{2п}}$. Из претходне две релације налазимо $v=c\frac{eE_0\tau_0}{\sqrt{(eE_0\tau_0)^2+m_p^2c^2}}$ $\boxed{\text{2п}}$, односно $v=2{,}7\cdot10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\boxed{\text{2п}}$. Пошто је брзина протона мања од брзине светлости, пут који ће прећи за време $2\tau_0$ је мањи од $2c\tau_0=9{,}0\ \mu\text{m}<10\ \mu\text{m}$ $\boxed{\text{6п}}$.
5. Размотримо најпре фотоне који падају на малу површину A_p на Земљи и чија брзина заклапа са нормалом на ту површину угао из малог интервала $(\theta,\theta+\mathrm{d}\theta)$. За време Δt на ту површину падну они фотони који се налазе унутар запремине $\Delta V=A_pc\cos\theta\Delta t$ приказане на слици 1 $\boxed{\text{3п}}$. Удео фотона чија је брзина усмерена под углом из малог интервала $(\theta,\theta+\mathrm{d}\theta)$ у укупном броју фотона је једнак односу површине прстена на сфери приказаног на слици 2 и укупне површине те сфере и једнак је $\mathrm{d}r=\frac{2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi}=\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$ $\boxed{\text{3п}}$. Тако је укупна енергија фотона који за време Δt падну на површину A_p једнака $\Delta E=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\mathrm{d}r\cdot u\cdot\Delta V$ $\boxed{\text{3п}}$. Даље је тражена величина једнака $I_p=\frac{\Delta E}{A_p\Delta t}=\frac{uc}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{uc}{4}$ $\boxed{\text{4п}}$, односно $I_p=3{,}002\cdot10^{-6}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ $\boxed{\text{2п}}$. Та величина је $s=\frac{\sigma T_z^4}{I_p}$ $\boxed{\text{3п}}$, односно $s=1{,}145\cdot10^8$ пута $\boxed{\text{2п}}$ мања од снаге коју зрачи Земља са јединице површине.



Слика 1: Запремина $\Delta V=A_pc\cos\theta\Delta t$ из које фотони падају на површину A_p.



Слика 2: Прстен на сфери који одређује област простора дефинисану углом из малог интервала $(\theta,\theta+\mathrm{d}\theta)$.

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд